المتغيرات المركبة وتطبيقات

تأليف

دويل ف. تشرشل

چيمس و. براون

روجر ف. فيرهي

أساتذة الرياضيات بجامعة ميتشجان



دار ماكجروهيل للنشر

المتغيرات المركبة وتطبيقات

تأليف

دويل ف . تشرشل

چيمس و. براون

روجر ف. فيرهي

أساتذة الرياضيات بجامعة ميتشجان

ترجمة ومراجعة

دكتور

بديع توفيق محمد حسن

استاذ الرياضيات

كلية العلوم - جامعة القاهرة

دكتور

اسماعيل عبد الرحمن أمين

استاذ الرياضيات المساعد

كلية العلوم - جامعة القاهرة



دار ماكجروهيل للنشر

نيويورك . سانت لويس . سان فرنسيسكو . اوكلاند. بوجوتا . دوسلدورف . جوهانسبرج . لندن . مدريد .
مكسيكو . مونتريال . نيودلهي . بناما . باريس . ساوباولو . سنغافورة . سيدني . طوكيو . تورنتو .

محمد يوسف العويشي

Complex Variables
And
Application

الطبعة العربية ١٩٨٢ تصدر بالتعاون مع المكتبة الأكاديمية بالقاهرة

ABC ودار المريخ للنشر المملكة العربية السعودية – الرياض

ص.ب ١٠٧٢٠

ISBN 0-07-010855-2

مقدمة

هذا الكتاب هو الصورة المنقحة من الطبعة الثانية التى صدرت سنة ١٩٦٠ من تأليف المؤلف الأول ر. ف تشرشل **R.V. Churchill** . وقد استخدمت تلك الطبعة ، تماماً كما استخدمت الطبعة الأولى من نفس المؤلف ، ككتاب دراسى لمقرر تمهيدى لمدة فصل دراسى واحد فى نظرية وتطبيقات دوال المتغير المركب . فى هذه الطبعة المنقحة حافظنا على المستوى الأساسى والهيكل العام للطبعتين السابقتين .

وقد تركز الجهد الأساسى للمؤلفين عند إعداد هذه الطبعة المنقحة فى تطوير أسلوب العرض وزيادة إيضاح التعريفات ونصوص النتائج . وقد قمنا أحياناً بتبديل ترتيب بعض الموضوعات وذلك من أجل تحقيق تسلسل أفضل لمادة الموضوع ، كما أننا قد أضفنا عددا من التذييلات التى تشير إلى بعض النتائج من حساب التفاضل والتكامل للمتغير الحقيقى . علاوة على ذلك فقد أضفنا عددا من التمارين الجديدة وذلك من أجل زيادة تطوير موضوعات معينة فى الكتاب ، كما أنه تم تغيير تمرينات أخرى من أجل زيادة الايضاح .

من بين التغييرات المحددة الأكثر جلاءا هو التقديم المبكر لصيغة أويلر ، وتقديم بند جديد عن كرة ريمان ، الباعث المباشر لتقديم الدالة الأسية للمتغير المركب كدالة شاملة مساوية لمشتقتها ، واستخدام أكثر حرصا لنقطة اللانهاية عند دراسة التحويلات الخطية الكسرية ، وإضافة بند جديد عن متتابعات الأعداد المركبة ، ومعالجة مستفيضة لمبدأ السعة ونظرية روشيه .

الهدف الأول – تماماً كما كان الحال فى الطبعتين السابقتين – من هذا التنقيح هو أن نقدم بأسلوب دقيق ومتكامل ذاتيا تلك الأجزاء من النظرية التى تلعب دورا رئيسيا فى تطبيقات هذا الموضوع . أما الهدف الثانى فهو تغطية تمهيدية لتطبيقات البواقى والرواسم الحافظة للزوايا الموجهة . وقد أعطى اهتمام خاص لاستخدام الرواسم الحافظة للزوايا

الموجهة فى حل مسائل الشروط الحدية التى تظهر عند دراسة التوصيل الحرارى ، وجهد الكهرباء الساكنة ، وسريان السوائل . بهذا يمكن اعتبار هذا الكتاب كمجلد مصاحب لكتابى ر .فى . تشرشل المعنونين **"Fourier Series and Baundary Value Problems"** و**"Operational Mathematies"** حيث عولجت طرق تقليدية أخرى لحل مسائل الشروط الحدية . والكتاب الثانى المذكور هنا يحوى أيضاً تطبيقات للبواقى تتعلق بتحويلات لابلاس .

الأبواب التسع الأولى من هذا الكتاب ، مع تبديلات متعددة من الأبواب الباقية ، شكلت لعديد من السنين المحتوى الدراسى لمقرر يعطى كل فصل دراسى لمدة ثلاث ساعات أسبوعيا بجامعة ميتشجان . وكانت هذه الفصول الدراسية تتشكل أساساً من طلبة السنوات النهائية وطلبة الدراسات العليا الذين سيتخصصون فى الرياضيات ، أو الهندسة ، أو أحد العلوم الطبيعية . وكانت المتطلبات هى أن يكون الطلبة قد أكملوا فصلا دراسيا واحدا فى حساب التفاضل والتكامل المتقدم . ويجب ملاحظة أن جزء من مادة الكتاب لا يعطى فى المحاضرات وإنما يترك للطلبة ليقرأوه معتمدين على أنفسهم .وإذا كان من المرغوب فيه اعطاء تطبيقات الرواسم الحافظة للزوايا الموجهة على مسائل الشروط الحدية فى وقت مبكر خلال المنهج ، فيمكن اعطاء البابين الثامن والتاسع مباشرة بعد الباب الرابع الخاص بدراسة دوال بسيطة .

وقد تم النص على معظم النتائج الأساسية كنظريات متبوعة بأمثلة وتمارين توضح هذه النتائج . وقد ذيلنا هذا الكتاب بقائمة من المراجع البديلة ، والبعض الكثير من المراجع المتقدمة ، وذلك بملحق (١) . كذلك يحوى ملحق (٢) قائمة من التحويلات الحافظة للزوايا الموجهة المفيدة فى التطبيقات .

عند إعداد هذه الطبعة المنقحة ، استعان المؤلفون باقتراحات التحسين التى اقترحها عدد من الطلبة والزملاء ونود أن نعبر هنا عن تقديرنا لكل منهم . كذلك نود أن نعبر عن عظيم تقديرنا إلى كاترين أ . ريدر **Catherine A. Rader** لمهارتها الفائقة وعنايتها بنسخ هذا المؤلف .

المؤلفون

عمر ابو يوسف الكويتي

المحتويات

الصفحة

الفصل الاول

الأعداد المركبة Complex Numbers

في هذا الباب سنستعرض البنية الجبرية والهندسية الأساسية لنظام الأعداد المركبة . وسنفترض إلمام القارىء بالخصائص المناظرة للأعداد الحقيقية .

١ - تعريف

يمكن تعريف الأعداد المركبة z على أنها أزواج مرتبة

$$z = (x,y) \qquad (١)$$

من الأعداد الحقيقية x، y، مع عمليتى جمع وضرب ستعرفان فيما يلى . الأعداد المركبة التى على الصورة $(0,y)$ تسمى **أعداد تخيلية** **Pure imaginary numbers** . فى الصيغة (١) ، العدد الحقيقى x يسمى **الجزء الحقيقى** **Real part** للعدد z ، العدد الحقيقى y يسمى الجزء التخيلى **Imaginary part** للعدد z ، ونكتب

$$\operatorname{Re} z = x \quad \text{و} \quad \operatorname{Im} z = y. \qquad (٢)$$

يقال لعددين مركبين (x_1,y_1) ، (x_2,y_2) أنهما متساويان عندما يكون لهما نفس الأجزاء الحقيقية ونفس الأجزاء التخيلية ، أى أن

$$(x_1,y_1) = (x_2,y_2) \iff x_1 = x_2 \quad \text{و} \quad y_1 = y_2. \qquad (٣)$$

ملحوظة : $\iff$ تعنى إذا وفقط إذا كان

تعرف عمليتى الجمع $(z_1 + z_2)$ والضرب (z_1z_2) للعددين المركبين

$z_1 = (x_1,y_1)$ و $z_2 = (x_2,y_2)$ كما يلى .

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad (٤)$$

$$(x_1,y_1)(x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2). \qquad (٥)$$

وعلى سبيل الخصوص ،

$$(x,0) + (0,y) = (x,y)$$

$$(0,1) \quad (y,0) = (0,y).$$

إذن ،

$$(x,y) = (x,0) + (0,1)(y,0). \quad (٦)$$

فيما يلى سنقرن كل زوج مرتب على الصورة $(x,0)$ بالعدد الحقيقى x ، وبالتالى فإنه يمكن اعتبار أن فئة الأعداد المركبة تحوى فئة الأعداد الحقيقية (أى أن فئة الأعداد الحقيقية يمكن النظر إليها على أنها فئة جزئية من فئة الأعداد المركبة) . بالإضافة إلى هذا ، فإن عمليتى الجمع والضرب المعرفتين كما فى (٤) ، (٥) تؤولان عند قصرهما على الأعداد الحقيقية إلى عمليتى الجمع والضرب المألوفتين :

$$(x_1,0) + (x_2,0) = (x_1 + x_2,0),$$
$$(x_1,0)(x_2,0) = (x_1x_2,0).$$

من هذا ينتج أن نظام الأعداد المركبة يشكل امتدادا طبيعيا لنظام الأعداد الحقيقية .

فإذا ما نظرنا إلى العدد الحقيقى على أنه إما x أو $(x,0)$ ، وإذا رمزنا للعدد التخيلى $(0,1)$ بالرمز i ، فإنه يمكننا إعادة كتابة (٦) على الصورة

$$(x,y) = x + iy. \quad (٧)$$

وإذا ما اصطلحنا على أن ... $z^2 = zz, z^3 = zz^2,$ ، فإننا نلاحظ أن

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0);$$

أى أن

$$i^2 = -1.$$

باستخدام (٧) يمكننا كتابة (٤) ، (٥) على الصورة

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (٨)$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2). \quad (٩)$$

لاحظ أن الأطراف اليمنى من هذه المعادلات يمكن الحصول عليها بمعاملة حدود الأطراف اليسرى كما لو كانت تتشكل فقط من أعداد حقيقية وبوضع 1- بدلا من i^2 كلما ظهرت .

٢ – الخصائص الجبرية Algebraic Properties

بعض خصائص عمليتى جمع وضرب الأعداد المركبة تماثل نظيراتها فى حالة الأعداد الحقيقية . وسندون هنا بعض الخصائص الجبرية الأساسية وسنتحقق من صحة بعض منها .

قوانين الإبدال

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \qquad z_1z_2 = z_2z_1 \quad (١)$$

وقوانين الدمج (أو التجميع)

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \qquad (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) \quad (٢)$$

يمكن إثبات صحتها مباشرة وبسهولة من تعريفى عمليتى جمع وضرب الأعداد المركبة وحقيقة أن هذه القوانين متحققة بالنسبة لعمليتى جمع وضرب الأعداد الحقيقية . مثال ذلك

$$z_1 + z_2 = (x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$$
$$= (x_2,y_2) + (x_1,y_1) = z_2 + z_1.$$

سنترك للقارىءمهمةإثبات صحة بقية القوانين المذكورة أعلاه وكذلك إثبات صحة قانون التوزيع

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \qquad (٣)$$

من قانون الإبدال لعملية الضرب ينتج أن $iy = yi$ ، وبالتالى فإنه يمكننا كتابة

$$z = x + iy \qquad \text{أو} \qquad z = x + yi.$$

العنصر المحايد صفر = (صفر ، صفر) ، أى $0 = (0,0)$ ، لعملية الجمع على الأعداد الحقيقية يكون عنصرا محايدا لعملية الجمع على الأعداد المركبة ، العنصر المحايد $1 = (1,0)$ لعملية الضرب على الأعداد الحقيقية يكون عنصرا محايدا لعملية الضرب على الأعداد المركبة ، أى أن

$$z + 0 = z \qquad \text{و} \qquad z \cdot 1 = z \qquad (٤)$$

لكل عدد مركب z . وفى الحقيقة ، فإن ١ و صفر هما العددان المركبان الوحيدان اللذان يحققان هذه الخصائص ، وسنترك مهمة إثبات صحة ذلك للقارىء .

لكل عدد مركب $z = (x,y)$ يوجد معكوس جمعى هو

$$-z = (-x, -y); \qquad (٥)$$

أى أن z - يكون عددا مركبا بحيث

$$z + (-z) = 0.$$

ويجب ملاحظة أن العدد z - المناظر للعدد z يكون وحيدا ، أى أن المعكوس الجمعى لأى عدد مركب z يكون وحيدا . ويستخدم مفهوم المعكوس الجمعى لتعريف عملية الطرح كما يلى :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \qquad (٦)$$

وبالتالى فإنه إذا كان $z_2 = (x_2,y_2)$ و $z_1 = (x_1,y_1)$ فإن

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \qquad (٧)$$

بالمثل ، لكل عدد مركب غير صفرى $z = (x,y)$ يوجد عدد مركب z^{-1} . بحيث $zz^{-1} = 1$.العدد المركب z^{-1} ، الذى يسمى المعكوس الضربى للعدد z ، أقل وضوحا من المعكوس الجمعى للعدد z . ولتعيين العدد z^{-1} ، نفرض أن $z^{-1} = (u,v)$ ونبحث عن الأعداد u, v ،أى أن المطلوب هو إيجاد الأعداد u, v بدلالة الأعداد x, y بحيث

$$(x,y)(u,v) = (1,0).$$

من هذا نرى أن u , v هما حلول المعادلتين الآنيتين

$$xu - yv = 1, \qquad yu + xv = 0$$

وبعمليات حسابية بسيطة نحصل على الحل الوحيد لهاتين المعادلتين على الصورة

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

أى أن المعكوس الضربى للعدد $z = (x,y)$ هو

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \qquad (٨)$$

يمكننا الآن تعريف القسمة على عدد مركب غير صفرى على النحو التالى :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} \qquad (z_2 \neq 0). \qquad (٩)$$

ويجب ملاحظة أنه إذا كان $z_2 = (x_2,y_2)$، $z_1 = (x_1,y_1)$ فمن معادلتى (٨) ، (٩) ينتج أن

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (z_2 \neq 0) \qquad (١٠)$$

ويجب ملاحظة أن عملية القسمة غير معرفة عندما $z_2 = 0$ ، وذلك حيث أن $z_2 = 0$ تعنى أن $x_2^2 + y_2^2 = 0$ ، وهذا غير مسموح به فى العلاقة (١٠) .

ويمكننا الآن أن نتبين وأن نتحقق بسهولة من بعض الخصائص الأخرى لعمليتى جمع وضرب الأعداد المركبة . فعلى سبيل الخصوص إذا كان $z_1 = 1$ فمن (٩) ينتج أن

$$\frac{1}{z_2} = z_2^{-1}.$$

وبالتالى فإن (٩) يمكن إعادة كتابتها على الصورة

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\left(\frac{1}{z_2}\right) \qquad (z_2 \neq 0) \qquad (١١)$$

باستخدام صيغتى ضرب وقسمة الأعداد المركبة أو حقيقة أن المعكوس الضربى لعدد مركب يكون وحيدا فإنه يمكننا استنتاج أن

$$\frac{1}{z_1z_2} = \left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right) \qquad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_1z_2 \neq 0) \qquad (١٢)$$

وباستخدام معادلتى (١١) ، (١٢) يمكننا أيضاً استنتاج أن

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}, \qquad \frac{z_1z_2}{z_3z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right) \qquad (١٣)$$

حيث $z_3 \neq 0, z_4 \neq 0, z_3z_4 \neq 0$

ماسبق يمكننا من إجراء الحسابات على الصورة التالية :

$$\left(\frac{1}{2-3i}\right)\left(\frac{1}{1+i}\right) = \frac{1}{5-i}\,\frac{5+i}{5+i} = \frac{5+i}{26} = \frac{5}{26} + \frac{1}{26}i.$$

خاصية هامة أخرى هى : إذا كان حاصل الضرب z_1z_2 يساوى صفرا فإن واحدا على الأقل من العددين z_1 , z_2 يساوى صفرا . ولإثبات ذلك نفرض أن

$z_1 \ z_2 = 0$ ، $z_1 \neq 0$. بكتابة $z_1 = (x_1,y_1),\ z_2 = (x_2,y_2)$ فإنه ينتج أن

$$x_1x_2 - y_1y_2 = 0 \quad \text{و} \quad y_1x_2 + x_1y_2 = 0 \qquad (١٤)$$

حيث واحد على الأقل من العددين x_1 , y_1 لا يساوى صفر . المعادلتان فى (١٤) معادلتان آنيتان متجانستان فى x_2 , y_2 . محدد المعاملات هو $x_1^2 + y_1^2$. وحيث أن هذا المحدد لا ينعدم فإنه ينتج أن الحل الوحيد لهاتين المعادلتين هو $x_2 = y_2 = 0$ ، أى أن $z_2 = 0$. وبالتالى فإنه إذا كان $z_1z_2 = 0$ فإنه إما $z_1 = 0$ أو $z_2 = 0$ أو أن ينعدم كل من z_1 , z_2 .

ويمكن التعبير عن هذه الخاصية المذكورة أعلاه بصورة أخرى على النحو التالى :

$$z_1 \neq 0, z_2 \neq 0 \quad \overset{*}{\Longrightarrow} \quad z_1z_2 \neq 0$$

الشرط $z_1z_2 \neq 0$ فى (١٢) والشرط $z_3z_4 \neq 0$ فى المعادلة الثانية من (١٣) لا لزوم لهما بالتالى . أخيراً ، يجب ملاحظة أن عملية الترتيب المألوفة للأعداد الحقيقية لا يمكن تطويعها لتشمل نظام الأعداد المركبة . وبالتالى فإن العبارة $z_1 < z_2$ يكون لها معنى فقط إذا كان كل من z_1 , z_2 عدداً حقيقيا .

تمارين

١ - تحقق من أن : (أ) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i) = -2i$; (ب) $(2, -3)(-2, 1) = (-1, 8)$

(جـ) $(3, 1)(3, -1)(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}) = (2,1)$; (د) $\dfrac{1+2i}{3-4i} + \dfrac{2-i}{5i} = -\dfrac{2}{5}$

(هـ) $\dfrac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \dfrac{1}{2}i$; (و) $(1-i)^4 = -4$

٢ - اثبت أن كلا من العددين $z = 1 \pm i$ يحقق المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$.

٣ - حل المعادلة $z^2 + z + 1 = 0$ وذلك بكتابة $z = (x,y)$ وحل المعادلة

$$(x,y)^2 + (x,y) + (1,0) = (0,0)$$

لإيجاد x , y . تحقق من صحة الحل .

اقتراح : لاحظ أن $y \neq 0$ وذلك حيث أنه لا يوجد عدد حقيقى x يحقق المعادلة

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

٤ - اثبت أن عملية الضرب إبدالية (أى تحقق خاصية الابدال) كما هو مذكور فى المعادلة الثانية من (١) ، بند (٢) .

٥ - اثبت صحة قوانين التجميع (٢) ، بند (٢) .

٦ - اثبت صحة قانون التوزيع (٣) ، بند (٢) .

---

* $\Longrightarrow$ تعنى إذا كان .... فإن ، أى أن التقرير المعطى يعنى إذا كان $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ فإن $z_1z_2 \neq 0$

٧ – اثبت أن

$$z(z_1 + z_2 + z_3) = zz_1 + zz_2 + zz_3.$$

٨ – اثبت أن العددين المركبين صفر و 1 هما عنصرا الجمع والضرب المحايدان الوحيدان .
اقتراح : إكتب $z = (x,y)$ وابحث عن الأعداد المركبة (u,v) بحيث $(x,y) + (u,v) = (x,y)$. بالمثل ابحث عن الأعداد المركبة (u,v) بحيث $(x,y)\,(u,v) = (x,y)$ عندما $z \neq 0$.

٩ – استخدم الفكرة المعطاة فى الاقتراح المدون بمسألة (٨) لإثبات أن z- هو المعكوس الجمعى الوحيد للعدد المركب z .

١٠ – اثبت أن (أ) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$ و (ب) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$ و (جـ) $1/(1/z) = z\ (z \neq 0)$

١١ – اثبت صحة العلاقة (١٢) ، بند (٢) .

١٢ – اثبت صحة العلاقة الأولى من (١٣) ، بند (٢) .

١٣ – اثبت صحة العلاقة الثانية من (١٣) ، بند (٢) ، واستخدمها لإثبات أن

$$\frac{zz_1}{zz_2} = \frac{z_1}{z_2} \qquad (z \neq 0,\ z_2 \neq 0).$$

١٤ – اثبت أن $(z_1z_2)(z_3z_4) = (z_1z_3)(z_2z_4)$

١٥ –اثبت أنه إذا كان $z_1z_2z_3 = 0$ فإن واحداً على الأقل من الأعداد z_1, z_2, z_3 يساوى صفراً .

١٦ – اثبت أن $(1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$

١٧ – استخدم الاستنتاج الرياضى لإثبات صحة مفكوك صيغة ذات الحدين

$$(1 + z)^n = 1 + \frac{n}{1!}z + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}z^k + \cdots + z^n$$

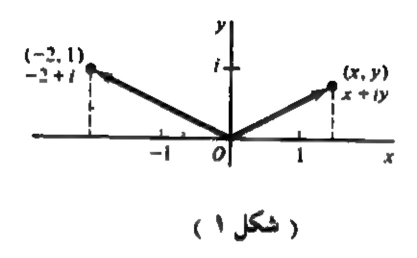
حيث n عدد صحيح موجب .

٣ – الإحداثيات الكارتيزية Cartesian Coordinates

من الطبيعى أن نقرن العدد المركب $z = x + iy$ بنقطة فى المستوى احداثياتها الكارتيزية x, y . وكل عدد مركب يناظر نقطة وحيدة من نقط المستوى ، وبالعكس كل نقطة من نقط المستوى يناظرها عدد مركب وحيد . فمثلا العدد المركب $-2 + i$ يمثل بالنقطة $(-2,1)$ (شكل (١)) . ويمكن النظر أيضاً للعدد المركب $z = x + iy$ على أنه **القطعة المستقيمة الموجهة** ، أو **المتجه** ، من نقطة الأصل للنقطة (x,y) . وعند استخدام المستوى تمثيل الأعداد المركبة $z = x + iy$ هندسيا فإن المستوى xy يسمى المستوى

المركب **Complex plane** أو **z plane** . وفى هذه الحالة يسمى محور السينات المحور الحقيقى **Real axis** كما يسمى محور الصادات المحور التخيلى **Imaginary axis** .

من تعريف جمع عددين مركبين $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ ، ينتج أن العدد المركب $z_1 + z_2$ يناظر النقطة $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ، كما أنه يناظر أيضاً متجه مركباته



(شكل ١)

$x_1 + x_2$ و $y_1 + y_2$. وبالتالى فإن $z_1 + z_2$ يمكن الحصول عليه بإستخدام المتجهات كما فى شكل (٢) (أى أن $z_1 + z_2$ هو العدد المركب المناظر لمتجه محصلة المتجهين المناظرين للعددين z_1, z_2) . العدد المركب $z_1 - z_2$ يمثل أيضاً بقطعة مستقيمة من النقطة (x_2, y_2) للنقطة (x_1, y_1) كما فى شكل (٣) .

يعرف **المقياس Modulus** (أو **القيمة المطلقة Absolute value**) لعدد مركب $z = x + iy$ على أنه العدد الحقيقى الغير سالب $\sqrt{x^2 + y^2}$ ويرمز له بالرمز $|z|$ ، أى أن

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{١}$$

العدد $|z|$ يمثل البعد بين النقطة (x,y) ونقطة الأصل . ويجب ملاحظة أن $|z|$ يؤول إلى القيمة المطلقة المألوفة فى نظام الأعداد الحقيقية عندما تكون $y = 0$. ويجب كذلك ملاحظة أنه بينما لا يكون للعبارة $z_1 < z_2$ معنى بصفة عامة فإن $|z_1| < |z_2|$ تعنى أن النقطة المناظرة للعدد z_1 تكون أقرب لنقطة الأصل من النقطة المناظرة للعدد z_2 .

البعد بين النقطتين المناظرتين للعددين المركبين z_1, z_2 يعطى بالعدد $|z_1 - z_2|$. وهذا يتضح مباشرة من العلاقة (٧) من بند (٢) وكذلك تعريف (١) أعلاه والذى يعطى

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

فمثلا الأعداد المركبة المناظرة للنقط الواقعة على محيط الدائرة التى مركزها (0,1) ونصف قطرها 3 تحقق المعادلة $|z - i| = 3$ ، والعكس أيضاً صحيح . وسنشير دائماً إلى هذه الفئة من النقط على أنها الدائرة $|z - i| = 3$.

الأعداد الحقيقية $|z|$, Re z, Im z ترتبط مع بعضها بالعلاقة

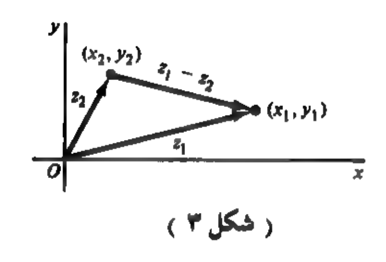
$$|z|^2 = (\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2 \tag{٢}$$

كما أنها ترتبط أيضاً بالمتباينات

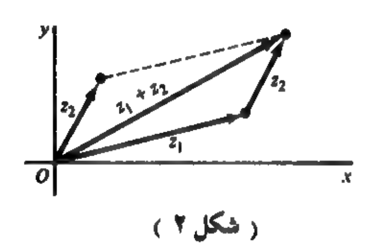
$$|z| \geqq |\text{Re } z| \geqq \text{Re } z \quad , \quad |z| \geqq |\text{Im } z| \geqq \text{Im } z \tag{٣}$$

العدد المركب المرافق Complex conjugate لعدد مركب $z = x + iy$ يعرف على أنه العدد المركب $x-iy$ ويرمز له بالرمز $\bar{z}$ ، أى أن

$$\bar{z} = x - iy. \tag{٤}$$



(شكل ٣)



(شكل ٢)

العدد المركب $\bar{z}$ يمثل هندسيا بالنقطة $(x,-y)$. وهذه النقطة هى صورة النقطة (x,y) بالانعكاس بالنسبة لمحور السينات . ويجب ملاحظة أن $\bar{\bar{z}} = z$ ، $|\bar{z}| = |z|$ لكل عدد مركب z .

إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$ فإن

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2).$$

أى أن العدد المركب المرافق لمجموع عددين يساوى مجموع العددين المركبين المرافقين :

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \tag{٥}$$

بالمثل يمكن بسهولة إثبات أن :

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \tag{٦}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \tag{٧}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \tag{٨}$$

المجموع $z + \bar{z}$ لعدد مركب ومرافقه هو العدد الحقيقى $2\,\text{Re } z$ ، الفرق $z-\bar{z}$ هو العدد التخيلى $i2\,\text{Im } z$. وبالتالى فإننا نحصل على المتطابقات

$$\text{Re } z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \text{Im } z = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \tag{٩}$$

المتطابقة التالية ، متطابقة هامة وهى تربط بين العدد المركب ومرافقه ومقياسه كالتالى :

$$z\bar{z} = |z|^2, \tag{١٠}$$

وكل طرف فى هذه المتطابقة يساوى $x^2 + y^2$. وعلى سبيل المثال ، هذه المتطابقة يمكن استخدامها لتعيين خارج القسمة فى المعادلة (١٠) من بند (٢) . والطريق إلى ذلك هو ضرب كل من البسط والمقام فى $\bar{z}_2$ وبالتالى يصبح المقام هو العدد المركب $|z_2|^2$. فمثلا

$$\frac{-1+3i}{2-i} = \frac{-1+3i}{2-i}\,\frac{2+i}{2+i} = \frac{-5+5i}{5} = -1+i.$$

٤ – المتباينة المثلثية **The Triangle Inequality**

من المعادلة (١٠) فى البند السابق يمكن بسهولة استنباط بعض خصائص المقياس وكذلك بعض العلاقات المعروفة التى تتعلق بالمقياس ومرافق العدد المركب .

فعلى سبيل المثال

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \tag{١}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (z_2 \neq 0) \tag{٢}$$

ولإثبات خاصية (١) ، نكتب

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = (z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2) = |z_1|^2|z_2|^2 = (|z_1|\,|z_2|)^2$$

وبمراعاة أن المقياس يكون دائماً غير سالب فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة . بالمثل يمكن إثبات خاصية (٢)

بإتباع هذا الأسلوب سنقوم بتقديم برهانا جبريا للمتباينة المثلثية :

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|, \tag{٣}$$

التى تتضح هندسيا من شكل (٢) . وهذه المتباينة ما هى إلا العلاقة الهندسية التى تنص على أن طول أى ضلع من أضلاع مثلث يكون أقل من أو يساوى مجموع طولى الضلعين الآخرين .

سنبدأ برهان هذه المتباينة بكتابة

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2).$$

ومنها ينتج – بإجراء عمليات الضرب فى الطرف الأيمن – أن

$$|z_1 + z_2|^2 = z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}) + z_2\bar{z}_2.$$

ولكن ،

$$z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 2\,\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_2) \leqq 2|z_1\bar{z}_2| = 2|z_1|\,|z_2|;$$

وبالتالى فإن

$$|z_1 + z_2|^2 \leqq |z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2,$$

أو

$$|z_1 + z_2|^2 \leqq (|z_1| + |z_2|)^2.$$

وبمراعاة أن المقياس يكون دائماً غير سالب فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة (٣) .
ويجب ملاحظة أنه يمكن بسهولة تعميم المتباينة المثلثية لأى عدد من الأعداد المركبة .
أى أنه يمكننا كتابة

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leqq |z_1 + z_2| + |z_3| \leqq |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

والتى يمكن تعميمها ، وإثباتها بإستخدام الاستنتاج الرياضى ، على الصورة

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqq \sum_{k=1}^{n} |z_k| \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (٤)$$

لاحظ أن العدد $||z_1|-|z_2||$ هو قيمة حدية سفلى Lower bound للعدد z_1+z_2 ، أى أن

$$||z_1| - |z_2|| \leqq |z_1 + z_2|. \qquad (٥)$$

ولإثبات ذلك ، نكتب

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leqq |z_1 + z_2| + |-z_2|,$$

وهذا يعنى أن

$$|z_1| - |z_2| \leqq |z_1 + z_2|. \qquad (٦)$$

وهذا يثبت المتباينة (٥) عندما $|z_1|\geqq|z_2|$ إذا كان $|z_1|<|z_2|$ فبإبدال z_2 , z_1 كل مكان الآخر فى المتباينة (٦) نحصل على أن

$$-(|z_1| - |z_2|) \leqq |z_1 + z_2|,$$

ومنها نحصل على النتيجة المطلوبة .
من المتباينة (٥) والمتباينة المثلثية نحصل على

$$||z_1| - |z_2|| \leqq |z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|. \qquad (٧)$$

تماريـــن

١ – عين المتجهات الممثلة للأعداد $z_1 - z_2,\ z_1 + z_2$ عندما

(أ) $z_1 = 2i,\ z_2 = \frac{2}{3} - i$ ؛ (ب) $z_1 = (-\sqrt{3}, 1),\ z_2 = (\sqrt{3}, 0)$

(جـ) $z_1 = (-3, 1),\ z_2 = (1,4)$ ؛ (د) $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_1 - iy_1$

٢ – اثبت أن النقطة الممثلة للعدد $(z_1 + z_2)/2$ هى النقطة المتوسطة للقطعة المستقيمة الواصلة للنقطتين z_1, z_2 .

٣ – اثبت أن (أ) $\overline{\bar{z} + 3i} = z - 3i$ ؛ (ب) $\overline{iz} = -i\bar{z}$

(جـ) $\dfrac{\overline{(2 + i)^2}}{3 - 4i} = 1$ ؛ (د) $|(2\bar{z} + 5)(\sqrt{2} - i)| = \sqrt{3}|2z + 5|$

٤ – اثبت صحة العلاقات (٢) ، (٣) من بند (٣) جبريا ثم فسر هذه العلاقات هندسيا .

٥ – اثبت أن $\sqrt{2}|z| \geqq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$

٦ – اثبت صحة العلاقات (٦) ، (٧) ، (٨) من بند (٣)

٧ - اثبت أن :

(أ) العدد z يكون حقيقيا إذا وفقط إذا كان $\bar{z} = z$ ،

(ب) العدد z يكون حقيقيا أو تخيليا إذا وفقط إذا كان $(\bar{z})^2 = z^2$.

٨ - اثبت أن : (أ) $\overline{z_1 z_2 z_3} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3$; (ب) $\overline{(z^4)} = (\bar{z})^4$

٩ اثبت صحة العلاقة (٢) من بند (٤) .

١٠ اثبت أنه إذا كان $z_2 z_3 \neq 0$ فإن

(أ) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2 z_3}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2 \bar{z}_3}$ ؛ (ب) $\left|\frac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|\,|z_3|}$

١١ - اثبت صحة : (أ) المتباينة (٤) من بند (٤) ،

(ب) المتباينات

$$||z_1| - |z_2|| \leqq |z_1 - z_2| \leqq |z_1| + |z_2|.$$

١٢ - فى كل حالة عين فئة النقط التى تحقق الشروط المعطاة :

(أ) $|z - 1 + i| = 1$ ؛ (ب) $|z + i| \leqq 3$

(جـ) $\mathrm{Re}\,(\bar{z} - i) = 2$ ؛ (د) $|z - i| = |z + i|$

١٣ اثبت أنه إذا كان $|z_2| \neq |z_3|$ فإن

$$\left|\frac{z_1}{z_2 + z_3}\right| \leqq \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}.$$

١٤ نفرض أن R مقدار ثابت موجب ، وأن z_0 عدد مركب معين . اثبت أن معادلة الدائرة التى نصف قطرها R ومركزها $-z_0$ تكون على الصورة

$$|z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\bar{z}_0 z) + |z_0|^2 = R^2.$$

١٥ - باستخدام المعادلات (٩) من بند (٣) اثبت أن القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$ يمكن كتابته على الصورة $z^2 + \bar{z}^2 = 2$.

١٦ تحقق هندسيا من أن العلاقة $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ تمثل قطعا ناقصا ثم اثبت هذا جبريا.

٥ - الإحداثيات القطبية Polar Coordinates

نفرض أن r, θ هى الأحداثيات القطبية للنقطة (x,y) المناظرة لعدد مركب غير صفرى $z = x + iy$. حيث أن

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta, \tag{١}$$

فإن العدد المركب z يمكن كتابته على **الصورة القطبية** **Polar form** كالتالى :

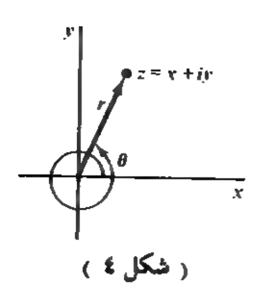
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{٢}$$

مثال ذلك ،

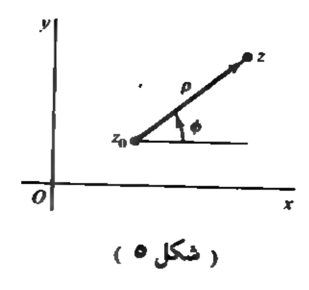
$$1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right].$$

والعدد r هو طول المتجه الممثل للعدد المركب z ، أى أن $r = |z|$. العدد θ يسمى **سعة Argument** العدد المركب z ، ونكتب $\theta = \arg z$. وهندسيا ، سعة العدد المركب z هى أى زاوية ، مقدرة بالتقدير الدائرى ، يصنعها المتجه الممثل للعدد المركب z مع الاتجاه الموجب للمحور الحقيقى (شكل (٤)) . وبالتالى فإن θ تأخذ أى قيمة من عدد لا نهائى من القيم الحقيقية التى تختلف عن بعضها بمقدار $2n\pi$ حيث n عدد صحيح . هذه القيم يمكن تعيينها من العلاقة

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (٣)$$



(شكل ٤)



(شكل ٥)

مع ملاحظة أنه يجب أولا تحديد ربع المستوى الذى تقع فيه النقطة المناظرة للعدد z . لأى عدد مركب غير صفرى z تعرف **القيمة الأساسية Principal value لسعة العدد z** على أنها القيمة الوحيدة لسعة العدد المركب z التى تحقق العلاقة

$$-\pi < \arg z \leqq \pi ,$$

ويرمز لها بالرمز Arg z.

إذا كان $z = o$ فإن المعادلة (٣) لا يمكن استخدامها وتكون θ غير معرفة . فى بقية هذا البند ، سيكون من المفهوم ، دون ما حاجة إلى ذكر ، أن الأعداد المركبة التى سنستخدم صورها القطبية ليست أعدادًا صفرية .

عندما $z \neq z_0$ فإن التمثيل

$$z - z_0 = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$$

للعدد $z\text{-}z_0$ على الصورة القطبية يمكن تفسيره هندسيا كما فى شكل (٥).

أى أن $\rho = |z - z_0|$ ، وهى تمثل البعد بين النقطة المناظرة للعدد z والنقطة المناظرة للعدد z_0 ، بينما $\phi = \arg (z - z_0)$ هى زاوية ميل المتجه الممثل للعدد المركب $z - z_0$.

المتطابقة التالية هامة جدا وهى تربط بين سعات الأعداد المركبة z_1, z_2, z_1z_2 :

$$\arg (z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \qquad (٤)$$

أى أن : أى سعة للعدد المركب z_1z_2 تساوى مجموع سعتين إحداهما للعدد z_1 والأخرى للعدد z_2 ، وبالعكس مجموع سعة ما للعدد z_1 وسعة ما للعدد z_2 يكون سعة للعدد z_1z_2 . المتطابقة (٤) ليست دائماً صحيحة إذا ما وضعنا Arg بدلا من arg . لنتبين هذا يكفى فقط أن نعتبر العددين $z_1 = -1 , z_2 = i$.

لإثبات صحة المتطابقة (٤) سنكتب أولا z_1 , z_2 على الصورة القطبية :

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2).$$

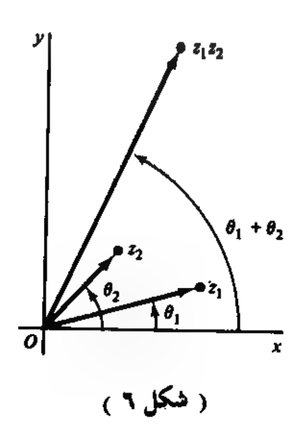
إذن ،

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)],$$

والتى يمكن كتابتها على الصورة المختزلة

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]. \qquad (٥)$$

وبالتالى فإن مجموع أى سعة للعدد z_1 وأى سعة للعدد z_2 يكون سعة للعدد z_1z_2 شكل (٦) .



(شكل ٦)

من ناحية أخرى ، اعتبر أى سعة للعدد المركب z_1z_2 . من المتطابقة (٥) ينتج أن هذه السعة لابد وأن تكون على الصورة $\theta_1 + \theta_2 + 2n\pi$ ، حيث n عدد صحيح . وبالتالى فإنه يمكننا أن نأخذ فى المتطابقة (٤) سعة z_1 ، سعة z_2 على سبيل المثال على الصورة

$$\arg z_1 = \theta_1 \qquad , \qquad \arg z_2 = \theta_2 + 2n\pi,$$

وبهذا يكتمل برهان المتطابقة (٤)

لاحظ أنه إذا ضرب عدد مركب غير صفرى $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ فى العدد التخيلى i فإن القطعة المستقيمة الموجهة الممثلة للعدد iz (ونقطة بدايتها نقطة الأصل) نحصل عليها من القطعة المستقيمة الموجهة الممثلة للعدد z (ونقطة بدايتها نقطة الأصل) بدوران الأخيرة حول نقطة الأصل زاوية قائمة فى الاتجاه الموجب (أى ضد اتجاه عقارب الساعة) . وذلك حيث إنه من المعادلة (٥) ينتج أن :

$$\begin{aligned} iz &= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

من المعادلة (٥) يمكننا بسهولة الحصول على الصورة القطبية للمعكوس الضربى لعدد مركب غير صفرى

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

على الصورة

$$z^{-1} = \frac{1}{r}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right], \tag{٦}$$

ويجب ملاحظة أن حاصل ضرب هاتين الصورتين القطبيتين يساوى 1 . وحيث إن $z_1/z_2 = z_1z_2^{-1}$ ، فإنه يمكننا كتابة الصورة القطبية لخارج قسمة عددين مركبين غير صفريين على النحو التالى :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]. \tag{٧}$$

من المفيد دائماً أن نرمز للمقدار $\cos\theta + i\sin\theta$ بالرمز $e^{i\theta}$ ، أى أن

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{٨}$$

وهذه العلاقة الأخيرة تعرف بإسم **صيغة أويلر** **Euler's formula** . وكما سنرى فيما بعد فى بند (٢١) فإن اختيار الرمز $e^{i\theta}$ لم يكن عشوائيا بل له ما يبرره . ويجب ملاحظة أن

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \tag{٩}$$

والتى يمكن الحصول عليها بسهولة من المعادلة (٥) عندما $r_1 = r_2 = 1$. أى أنه عندما $z_1 = e^{i\theta_1}$ و $z_2 = e^{i\theta_2}$ فإن $z_1 z_2 = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ والخاصية رقم (٩) هى بطبيعة الحال المماثلة للخاصية المناظرة للدالة e^x عندما يكون x عدداً حقيقياً .

من المعادلة (٩) نلاحظ أن $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$. وبالتالى فإن العدد المركب $e^{-i\theta}$ هو المعكوس الضربى للعدد المركب $e^{i\theta}$ ، وبالتالى فإن

$$1/e^{i\theta} = e^{-i\theta}.$$

من المعادلات (٢) ، (٨) ينتج أن أى عدد مركب غير صفرى z يمكن كتابته على الصورة

$$z = re^{i\theta}; \tag{١٠}$$

ومن المعادلة (٦) ينتج أن المعكوس الضربى للعدد z هو

$$z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}. \tag{١١}$$

كذلك ، إذا كان $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ ، $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ، فمن المعادلات (٥) ، (٧) ينتج أن

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{١٢}$$

و

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}, \tag{١٣}$$

٦ – قوى وجذور Powers and Roots الأعداد المركبة

إذا كان $z = re^{i\theta}$ عدد مركب غير صفرى فإن z^n حيث n عدد صحيح يعطى بالعلاقة

$$z^n = r^n e^{in\theta} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{١}$$

وهذه العلاقة يمكن إثباتها بسهولة بإستخدام الاستنتاج الرياضى والعلاقة (٩) من البند السابق عندما يكون n عددا طبيعيا . وهذه العلاقة تكون صحيحة أيضاً عندما $n = 0$ وذلك مع ملاحظة أننا سنعتبر أن $z^0 = 1$. إذا كان $n = 1, -2, \ldots$ فإننا نعرف z^n بالعلاقة

$$z^n = (z^{-1})^{-n}.$$

من هذا ينتج باستخدام العلاقة (١١) من بند (٥) وحقيقة أن العلاقة (١) صحيحة عندما يكون n عددا صحيحاً موجبا

$$z^n = \left(\frac{1}{r}\right)^{-n} e^{i(-n)(-\theta)} = r^n e^{in\theta}.$$

إذن العلاقة (١) صحيحة عندما يكون n عددا صحيحا .

لاحظ أنه عندما تكون r = 1 فإن العلاقة (١) تصبح

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \qquad (٢)$$

أو

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \qquad (٣)$$

وهذه النتيجة الأخيرة تعرف **بنظرية ديموافر** **de Moivre's theorem**.

العلاقة (١) مفيدة جدا ، فعلى سبيل المثال عند حساب جذور الأعداد المركبة الغير صفرية . ولتوضيح ذلك ، سنقوم بحل المعادلة

$$z^n = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (٤)$$

أى أننا سنوجد الجذور النونية للوحدة . وحيث أن $z \neq 0$ فإنه يمكننا كتابة $z = re^{i\theta}$ ونبحث عن قيم θ ، r التى تحقق العلاقة

$$(re^{i\theta})^n = 1,$$

أو

$$r^n e^{in\theta} = 1e^{i0}.$$

من المعلوم أنه إذا تساوى عددان مركبان فإنه يكون لهما نفس المقياس ، وإذا كان هذان العددان على الصورة القطبية فإن سعتيهما تختلفان بالمقدار $2k\pi$ حيث k عدد صحيح . إذن

$$r^n = 1 \qquad \text{و} \qquad n\theta = 0 + 2k\pi$$

حيث k عدد صحيح $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ وبالتالى فإن

$$r = 1 \ , \ \theta = 2k\pi/n,$$

وبذلك يكون لدينا n من الحلول المختلفة

$$z = e^{i(2k\pi/n)} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

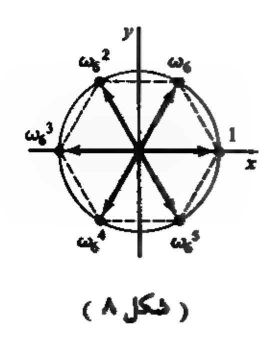
للمعادلة (٤) . أى أن الأعداد المركبة

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \qquad (٥)$$

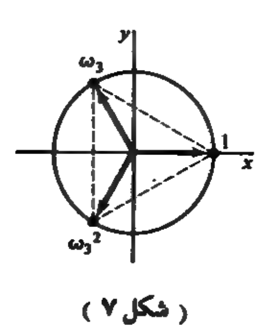
هى الجذور النونية للوحدة . ويجب ملاحظة أنه لا يمكن الحصول على أى جذور إضافية مختلفة بإعطاء k قيما أخرى خلاف تلك المذكورة أعلاه وذلك حيث أن الدالتين **Cosine، Sine** دالتان دوريتان .

من هذا ينتج أن الجذور النونية للوحدة عددها n . وهذه الجذور تناظر هندسيا النقط الواقعة عند رؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه n . وهذا المضلع يقع داخل دائرة نصف قطرها الوحدة ومركزها نقطة الأصل ، إحدى رؤوس هذا المضلع هى النقطة المناظرة للجذر $z = 1$. وإذا كتبنا

$$\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \qquad (٦)$$



(شكل ٨)



(شكل ٧)

فمن نظرية ديموافر ينتج أن الجذور النونية للوحدة هى $1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$. ويجب ملاحظة أن $\omega_n^n = 1$. شكل (٧) يوضح أن الجذور التكعيبية للوحدة تقع على رؤوس مثلث متساوى الأضلاع . وشكل (٨) يوضح مواقع الجذور عندما $n = 6$.

وما ذكرناه آنفا يمكن تعميمه لإيجاد الجذور النونية لأى عدد مركب غير صفرى

$$w = \rho(\cos \phi + i \sin \phi).$$

وهذه الجذور هى

$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \qquad (٧)$$

حيث $\sqrt[n]{\rho}$ الجذر النونى الموجب للعدد الحقيقى ρ . والعدد $\sqrt[n]{\rho}$ يمثل هندسيا طول كل من المتجهات المناظرة للجذور النونية . وسعة أحد هذه الجذور النونية تساوى ϕ/n وللحصول على سعات الجذور النونية الأخرى فإنه يضاف للمقدار ϕ/n مضاعفات صحيحة للمقدار $2\pi/n$. ويجب ملاحظة أنه إذا كان z_0 أى جذر نونى للعدد w فإن الجذور النونية للعدد w تكون

$$z_0, z_0\omega_n, z_0\omega_n^2, \ldots, z_0\omega_n^{n-1}$$

حيث ω_n كما هى معطاة فى العلاقة (٦) . وهذا يرجع إلى أن ضرب أى عدد مركب غير صفرى فى العدد المركب ω_n يناظر زيادة قدرها $2\pi/n$ فى سعة هذا العدد .

سنرمز لأى جذر نونى لعدد مركب غير صفرى w بالرمز $w^{1/n}$. على سبيل الخصوص ، إذا كان w عددا حقيقيا موجبا ρ فإن $\rho^{1/n}$ يرمز إلى أى جذر من الجذور وسنحتفظ بالرمز $\sqrt[n]{\rho}$ المستخدم فى (٧) للدلالة على الجذر الوحيد الموجب .

تماريــــن

١ – اوجد قيمة arg z عندما

(أ) $z = \frac{-2}{1 + i\sqrt{3}}$ ، (ب) $z = \frac{i}{-2-2i}$ ، (جـ) $z = (\sqrt{3} - i)^6$

الأجوبة : (أ) $2\pi/3$ ، (جـ) π

٢ – استخدم الصورة القطبية لإثبات أن

(أ) $i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = 2 + i2\sqrt{3}$ ، (ب) $5i/(2+i) = 1 + 2i$

(جـ) $(-1+i)^7 = -8(1+i)$ ، (د) $(1 + i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1 + i\sqrt{3})$

٣ – فى كل حالة اوجد جذور الأعداد المركبة المعطاة ومثلهم هندسيا :

(أ) $(2i)^{1/2}$ ، (ب) $(-i)^{1/3}$ ، (جـ) $(-1)^{1/3}$ ، (د) $8^{1/6}$

الأجوبة : (أ) $\pm(1+i)$ ، (ب) $i, (\pm\sqrt{3} - i)/2$ ، (د) $\pm\sqrt{2}, (1 \pm i\sqrt{3})/\sqrt{2}, (-1 \pm i\sqrt{3})/\sqrt{2}$

٤ – إثبت صحة العلاقة (١) من بند (٦) عندما تكون $n = 1, 2, \ldots$.

٥ – اوجد قيمة من قيم سعة z عندما: $z_2 \neq 0$ ، $z_1 \neq 0$

(أ) $z = z_1/z_2$ ، (ب) $z = z_1^n \; (n = 1, 2, \ldots)$ ، (جـ) $z = z_1^{-1}$

الأجوبة : (أ) $\arg z_1 - \arg z_2$ ؛ (ب) $n \arg z_1$ ؛ (جـ) $-\arg z_1$

٦ – اثبت أن $\arg \bar{z} = -\arg z,$ حيث $z \neq 0$. عين الشروط الأخرى التى يجب توافرها فى العدد z حتى يكون $\text{Arg}\, \bar{z} = -\text{Arg}\, z$.

الإجابة : z لا تكون عددا حقيقيا سالبا .

٧ – نفرض أن z عدد مركب غير صفرى وأن n عدد صحيح سالب $(n = -1, -2, \ldots)$.
باستخدام التعريف $z^n = (z^{-1})^{-n}$ المعطى فى بند (٦) اثبت أنه يمكننا كذلك كتابة $z^n = (z^{-n})^{-1}$.

٨ – اوجد الجذور الأربعة للمعادلة $z^4 + 4 = 0$ واستخدم ذلك لتحليل المقدار $z^4 + 4$ إلى مقادير من الدرجة الثانية ذات معاملات حقيقية.

الإجابة : $(z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 2)$

٩ – استخدم نظرية ديموافر لإثبات المتطابقات المثلثية التالية :

(أ) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \sin^2\theta$ ؛ (ب) $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta.$

١٠ – استنتج العلاقة (٧) من بند (٦) .

١١ – بفرض أن $z_1 z_2 \neq 0$، استخدم الصورة القطبية لإثبات أن

$$\text{Re}\,(z_1\bar{z}_2) = |z_1|\,|z_2| \iff \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi \; (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

حيث $\theta_1 = \arg z_1$ و $\theta_2 = \arg z_2$.

١٢ – بفرض أن $z_1 z_2 \neq 0$ ، استخدم مسألة (١١) لإثبات أن

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi \; (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$

حيث $\theta_1 = \arg z_1$ و $\theta_2 = \arg z_2$. تحقق من هذا هندسيا .

١٣ بفرض أن $z_1 z_2 \neq 0$، استخدم مسألة (١١) لإثبات

$$|z_1 - z_2| = ||z_1| - |z_2|| \iff \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

حيث $\theta_1 = \arg z_1 \;,\; \theta_2 = \arg z_2$.

١٤ اثبت صحة المتطابقة

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \qquad (z \neq 1);$$

ثم استنتج متطابقة لاجرانج المثلثية Lagrange's trigonometric identity :

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})\theta]}{2\sin(\theta/2)} \qquad (0 < \theta < 2\pi).$$

اقتراح : للحصول على المتطابقة الأولى ضع $S = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n$

واعتبر الفرق $S - zS$.

١٥ إذا كان z أى جذر من الجذور النونية للوحدة بحث $z \neq 1$ فإثبت أن

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0.$$

اقتراح : استخدم المتطابقة الأولى فى مسألة (١٤) .

١٦ **اثبت أن الصيغة المألوفة لحل معادلة الدرجة الثانية يمكن استخدامها لحل المعادلة** $az^2 + bz + c = 0$ **عندما تكون المعاملات a,b,c أعدادا مركبة .**

٧ المناطق فى المستوى المركب Regions in the Complex Plane

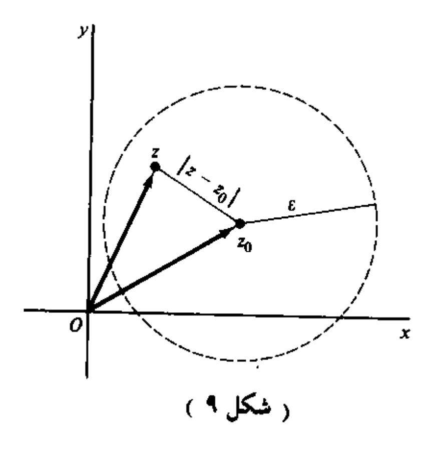
فى هذا البند سنقوم بدراسة فئات من الأعداد المركبة (أى من النقط) ومدى قربها من بعضها . ووسيلتنا الأساسية فى هذا هو مفهوم **جوار** ε **-neighborhood** ε أو ببساطة الجوار **neighborhood**-ويعرف جوار ε لنقطة معينة z_0 على أنه فئة النقط z التى تحقق العلاقة

$$|z - z_0| < \varepsilon \qquad (١)$$

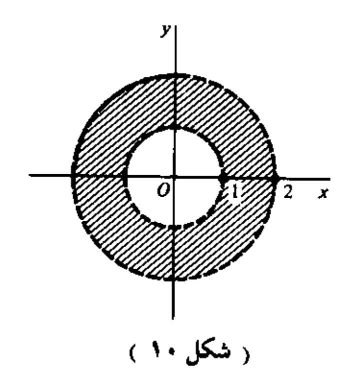
أى فئة النقط z التى تقع داخل (وليس على محيط) دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها عدد موجب معين ε (شكل (٩)) .

يقال لنقطة z_0 أنها **نقطة داخلية Interior point** لفئة S إذا وجد جوار للنقطة z_0 يكون فئة جزئية من S ، ويقال للنقطة z_0 أنها **نقطة خارجية Exterior point** للفئة S إذا وجد جوار للنقطة z_0 لا يحوى أى نقطة من نقط S . إذا لم تكن z_0 نقطة خارجية أو داخلية للفئة S فإنه يقال أن z_0 نقطة حدية أو نقطة حدود **Boundary point** للفئة S . أى أن النقطة الحدية هى تلك النقطة التى يحوى كل جوار لها نقط من S ونقط لا تنتمى للفئة S . فئة كل النقط الحدية للفئة S يقال لها حد **Boundary** الفئة S . فمثلا الدائرة $|z| = 1$ هى حد لكل من الفئتين

$$|z| < 1 \quad , \quad |z| \leq 1. \qquad (٢)$$



(شكل ٩)



(شكل ١٠)

يقال لفئة ما أنها **مفتوحة Open** إذا كانت لا تحوى أى نقطة من نقطها الحدية . وسنترك للقارىء مهمة إثبات أن الفئة تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت كل نقطة من نقطها نقطة داخلية لها . ويقال لفئة ما أنها **مغلقة Closed** إذا كانت تحوى كل نقطة من نقطها الحدية . الفئة المغلقة التى تتكون من اتحاد الفئة S وفئة نقطها الحدية تسمى **مُغْلِقة Closure** الفئة S ويرمز لها بالرمز $\bar{S}$. ويجب ملاحظة أن الفئة $|z| < 1$ تكون مفتوحة ، أن الفئة $1 \leq |z|$ هى مُغْلِقة كل من الفئتين $|z| < 1$, $|z| \leqq 1$

وبطبيعة الحال فإن بعض الفئات لا تكون مفتوحة أو مغلقة . ولكى لا تكون فئة ما مفتوحة فإنها لابد وأن تحوى إحدى نقطها الحدية ، ولكى لا تكون فئة ما مغلقة فإنه لابد وأن نجد إحدى نقطها الحدية الغير منتمية لها . فالفئة $0 < |z| \leqq 1$ ليست مفتوحة أو مغلقة ؛ بينما فئة جميع الأعداد المركبة تكون مفتوحة ومغلقة فى نفس الوقت وذلك لعدم وجود نقط حدية .

يقال لفئة مفتوحة S أنها **مترابطة Connected** إذا كان بالإمكان أن نصل أى نقطتين من نقطها **بمسار مضلعى Polygonal path** ، يتكون من عدد محدود من القطع المستقيمة

المتصلة نهاية بنهاية و يقع بأكمله فى الفئة S . فالفئة المفتوحة $|z| < 1$ مترابطة . والحلقة Annulus $1 < |z| < 2$ هى بطبيعة الحال فئة مفتوحة وأيضاً مترابطة (شكل (١٠)) .
الفئة المفتوحة المترابطة يقال لها **نطاق** **Domain** . ويجب ملاحظة أن كل جوار يكون نطاقا تسمى الفئة **منطقة** **Region** إذا كانت نطاقاً أو نطاقا مضافا إليه بعض أو كل نقطه الحدية .

يقال لفئة S أنها **محدودة** **Bounded** إذا كانت كل نقطة من نقط S تقع داخل دائرة ما $|z| = R$ ، وإذا لم تكن الفئة كذلك فإنه يقال لها فئة **غير محدودة** **Unbounded** . فى البند التالى سنتعرض لمفهوم الفئة الغير محدودة بتفصيل أكثر .

أخيرا ، يقال لنقطة z_0 أنها نقطة تراكم **Accumulation point** لفئة S إذا كان كل جوار للنقطة z_0 يحوى نقطة واحدة على الأقل ، مختلفة عن z_0 ، من نقط S . من هذا ينتج أنه إذا كانت S فئة مغلقة فإنها تحوى كل نقطة تراكم لها . وذلك لأنه إذا كانت z_0 نقطة تراكم للفئة S بحيث $z_0 \notin S$ فإن z_0 لابد وأن تكون نقطة حدية للفئة S ، ولكن هذا يناقض حقيقة أن الفئة المغلقة تحوى كل نقطة حدية لها . وسيترك للقارىء مهمة إثبات أن عكس هذا يكون أيضاً صحيحا ، أى أنه إذا كانت الفئة S تحوى كل نقطة تراكم لها فإنها تكون مغلقة . وبالتالى فإن :

الفئة S تكون مغلقة إذا وفقط إذا كانت تحوى كل نقطة تراكم لها .

من الواضح أن النقطة z_0 لا تكون نقطة تراكم للفئة S إذا وجد جوار ما للنقطة z_0 لا يحوى أى نقطة ، مختلفة عن z_0 ، من نقط S . لاحظ أن نقطة الأصل هى نقطة التراكم الوحيدة للفئة $z_n = i/n \quad (n = 1, 2, \ldots)$

٨ – نقطة اللانهاية The Point at Infinity

من المفيد أحيانا أن نضم للمستوى المركب نقطة اللانهاية (أو النقطة فى مالا نهاية) ، والتى يرمز لها بالرمز ∞ . المستوى المركب مضافا إليه هذه النقطة يسمى **المستوى المركب الممتد** **Extended complex plane** .

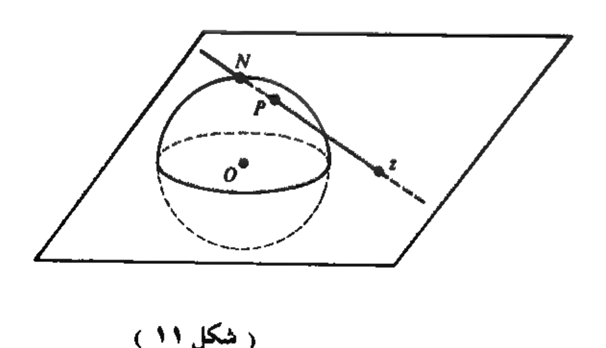
ولنوضح مفهوم نقطة اللانهاية فيمكننا النظر إلى المستوى المركب كما لو كان مارا بخط استواء كرة نصف قطرها الوحدة ومركزها النقطة $z=0$ (شكل (١١)) . كل نقطة z من نقط المستوى يناظرها نقطة وحيدة P على سطح الكرة . النقطة P هى نقطة تقاطع سطح الكرة مع الخط المستقيم المار بالنقطة z والقطب الشمالى N للكرة . بالمثل ، كل نقطة P على سطح الكرة ، مختلفة عن القطب الشمالى N ، يناظرها نقطة وحيدة z

فى المستوى . فإذا ما اعتبرنا أن القطب الشمالى N للكرة يناظر نقطة اللانهاية ، فإننا بذلك نكون قد حصلنا على تناظر أحادى بين نقط الكرة ونقط المستوى المركب الممتد . هذه الكرة تعرف باسم كرة ريمان **Riemann sphere** ، وهذا التناظر يعرف باسم الإسقاط الاستريوجرافى **Stereographic projection** .

لاحظ أن خارجية دائرة الوحدة التى مركزها نقطة الأصل فى المستوى المركب تناظر نصف الكرة الواقع فوق المستوى مع استبعاد خط الاستواء والنقطة N . بالإضافة إلى ذلك ، فلكل عدد صغير موجب ε ، تكون نقط المستوى المركب الواقعة خارج الدائرة $|z| = 1/\varepsilon$ مناظرة لنقط الكرة القريبة من N . لذلك سنسمى الفئة $|z| > 1/\varepsilon$ (جوار ε) للنقطة ∞.

عندما يحوى كل جوار للنقطة ∞ نقطة واحدة على الأقل من نقط فئة معينة S فى المستوى المركب فإننا نقول أن ∞ نقطة تراكم للفئة S . وكمثال لتوضيح ذلك ، النقطة ∞ تكون نقطة تراكم للفئة $z_n = ni$ ، حيث $n = 0,1,2,\ldots$ ، كما أنها نقطة تراكم للنطاق $\operatorname{Im} z > 0$. ويجب ملاحظة أن الفئة S تكون غير محدودة (كما فى بند ٧) إذا وفقط إذا كانت ∞ إحدى نقط تراكمها.

وسنتفق على أنه عندما نقول نقطة z فإننا سنعنى نقطة فى المستوى المركب النهائى **Finite** . وإذا ما أردنا بحديثنا نقطة اللانهاية فسنذكر ذلك صراحة .



(شكل ١١)

تماريـــن

١ – فى كل حالة ارسم الفئة المعنية ووضح ما إذا كانت نطاقا :

(أ) $|z-2+i| \leqq 1$ ؛ (ب) $|2z+3|>4$ ؛ (جـ) $\operatorname{Im} z>1$ ، (د) $|\operatorname{Im} z|>1$

(هـ) $|z|>0,\ 0 \leqq \arg z \leqq \pi/4$ (و) $|z-4| \geqq |z|$ (ز) $0<|z-z_0|<$.

حيث z_0 نقطة ثابتة ، S عدد موجب

الأجوبة : كل من (ب) ، (جـ) ، (ز) تكون نطاقا .

٢ – أى الفئات فى (١) لا تكون مفتوحة أو مغلقة ؟

الإجابة : (هـ)

٣ – أى الفئات فى (١) تكون محدودة ؟

الأجوبة : (أ) ، (ز)

٤ – فى كل حالة ارسم

(أ) $|z|>0,\ -\pi<\arg z<\pi$ ؛ (ب) $|\operatorname{Re} z|<|z|$ ؛ (جـ) $\operatorname{Re}(1/z) \leqq 1/2$ ؛ (د) $\operatorname{Re}(z^2)>0$.

٥ – نفرض أن S هى الفئة المفتوحة التى تتكون من النقط z بحيث

$$|z-2|<1 \quad \text{أو} \quad |z|<1$$

بين لماذا لا تكون S مترابطة

٦ – بين أن الفئة S تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت كل نقطة من نقط S نقطة داخلية لها .

٧ – عين نقط تراكم كل فئة من الفئات التالية :

(أ) $z_n = i^n \ (n=1, 2, \ldots)$ ؛ (ب) $z_n=(1/n)i^n \ (n=1, 2, \ldots)$ ؛ (جـ) $|z|>1,\ 0 \leqq \arg z<\pi/2$ ؛

(د) $z_n=(-1)^n(1+i)(n-1)/n \ (n=1, 2, \ldots)$.

الأجوبة : (أ) لا يوجد ، (ب) 0 ، (د) $\pm(1+i)$

٨ – اثبت أنه إذا كانت فئة تحوى كل نقطة تراكم لها فإنها لابد وأن تكون مغلقة .

٩ – اثبت أن أى نقطة z_0 من نطاق تكون نقطة تراكم لهذا النطاق .

١٠ – اثبت أن أى فئة نهائية من النقط $z_1, z_2, \ldots, z_n$ لا يمكن أن يكون لها نقط تراكم

١١ – فى المستوى المركب الممتد اثبت أن نقطة اللانهاية تكون نقطة تراكم لكل من الفئتين

$$\operatorname{Re} z<0 \quad ، \quad \operatorname{Re} z>0.$$



الفصل الثانى

الدوال التحليلية Analytic Functions.

سنعتبر الآن دوال المتغير المركب ونعطى نظرية لإيجاد مشتقات مثل هذه الدوال . والهدف الأساسى من هذا الباب هو تقديم **الدوال التحليلية Analytic functions**، التى تلعب دوراً رئيسياً فى نظرية التحليل المركب (أو العقدى) Complex analysis

٩ - دوال المتغير المركب Functions of a Complex Variable

لتكن S فئة من الأعداد المركبة . « f **دالة Function** على S » تعبير نعنى به قاعدة تحدد لكل z فى S عدد مركب w ، العدد المركب w يقال له **قيمة Value** الدالة f عند z ويرمز له بالرمز f (z)(*) ، أى

$$w = f(z)$$

الفئة S يقال لها **نطاق تعريف Domain of definition** الدالة f . وبالرغم من أن نطاق تعريف دالة ما كثيرا ما يكون نطاقا (بحسب تعريف النطاق الوارد فى بند (٧)) ، إلا أنه يجب مراعاة أن هذا ليس صحيحا دائماً .

نرى أنه ليس من الملائم دائماً استخدام تدوينات (رموز) مختلفة للتفريق بين الدالة وقيمها . فعلى سبيل المثال الدالة f المعرفة على الفئة $\mathrm{Im}\, z > 1$ بالمعادلة $w = 1/z$ يمكن الإشارة إليها على أنها الدالة $1/z$ المعرفة على $\mathrm{Im}\, z > 1$. وعليه يمكن وصف الدالة بذكر قيمها عند كل نقطة من نقاط نطاق تعريفها .

عندما لا يذكر نطاق تعريف الدالة ، نتفق على اعتباره أكبر فئة ممكنة لهذا التعريف . وعليه فعندما نتحدث عن الدالة ، فإن نطاق تعريفها يكون جميع نقط المستوى غير الصفرية .

فى نظرية المتغيرات المركبة يظهر لدينا ما يسمى **بالدوال متعددة القيم Multiple-valued functions**، أى الدوال التى يمكن أن تأخذ أكثر من قيمة عند نقطة ما . مثال ذلك الدالة $z^{1/2}$ التى تأخذ قيمتين عند كل نقطة غير صفرية فى المستوى

---

* حاشية للمترجمين : يلاحظ القارىء أن مفهوم الدالة المستخدم يختلف عن ذلك المستخدم حالياً فى فروع الرياضيات ؛ بيد أن المفهوم الذى يستخدمه المؤلفون يسمح لنا كما سنرى بالتحدث عن الدوال متعددة القيم .

المركب . ودراستنا للدوال متعددة القيم سوف تتضمن عادة دوال معينة وحيدة القيم يحدد لها قيمة واحدة من القيم الممكنة عند كل نقطة . وسنتفق ، ما لم ينص صراحة على غير ذلك ، على اعتبار لفظ دالة مشيراً إلى دالة وحيدة القيم .

نفرض أن $w = u + iv$ هى قيمة الدالة f عند $z = x + iy$، أى أن

$$u + iv = f(x + iy).$$

كل من العددين الحقيقيين v,u يعتمد على المتغيرين الحقيقيين y,x ؛ فمثلا إذا كان $f(z) = z^2$ ، فإن

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy;$$

وعليه فإن

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{و} \quad v = 2xy.$$

وهذا يوضح كيف يمكن لدالة لمتغير مركب z أن يعبر عنها بواسطة زوج من الدوال الحقيقية فى المتغيرين الحقيقيين y,x :

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y). \qquad (١)$$

وإذا اعطينا من الناحية الأخرى دوال حقيقية $u(x,y)$ و $v(x,y)$ فى المتغيرين الحقيقيين y,x فإن المعادلة (١) يمكن استخدامها لتعريف دالة فى المتغير المركب $z = x + iy$. فمثلا إذا أعطينا الدالتين الحقيقيتين المشار إليهما فيما يلى ، فإنه يمكننا أن نكتب

$$f(z) = y\int_0^\infty e^{-xt}\,dt + i\sum_{n=0}^{\infty} y^n. \qquad (٢)$$

ومفهوم هنا أن نطاق تعريف الدالة f هو الشريحه النصف لا نهائية $x > 0, -1 < y < 1$ ، وذلك لأن هذه القيم للمتغيرين y,x هى قيم تقارب كل من التكامل المعتل والمتسلسلة اللانهائية .

إذا كان $v(x,y)$ فى (١) مساويا دائماً للصفر ، فإن العدد $f(z)$ يكون حقيقياً دائماً . وكمثال لدالة متغير مركب ذات قيم حقيقية نذكر الدالة $f(z) = |z|^2$.

إذا كان n عدداً صحيحاً أكبر من أو يساوى صفر وكانت $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ثوابت مركبة ، فإن الدالة

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0)$$

يقال لها كثيرة حدود من درجة n . لاحظ أن المجموع هنا يحتوى على عدد محدود من الحدود وأن نطاق تعريف هذه الدالة هو المستوى المركب z بأكمله . دوال القسمة $P(z)/Q(z)$ لكثيرات الحدود $P(z), Q(z)$ تسمى **دوال قياسية** Rational functions وهى معرفة لجميع قيم z فيما عدا تلك التى تجعل $Q(z) = 0$. كثيرات الحدود والدوال القياسية دوال بسيطة وهامة فى نفس الوقت من دوال المتغير المركب .

١٠ – الرواسم Mappings

كثيراً ما يُظهر لنا التمثيل البيانى لدالة حقيقية لمتغير حقيقى خواص هذه الدالة . أما فى الحالة $w = f(z)$ حيث w,z متغيران مركبان ، فلا يوجد مثل هذا التمثيل البيانى الميسر للدالة f ، والسبب فى ذلك أن كلاً من العددين w,z له موقع ، أى يمثل بنقطة ، فى المستوى وليس على خط مستقيم . إلا أنه يمكننا مع ذلك كشف بعض المعلومات حول الدالة عن طريق تحديد أزواج من النقاط المتناظرة $w = (u,v), z = (x,y)$. ولإجراء ذلك نجد أنه من الأيسر رسم مستويين منفصلين لكل من w,z .

عندما نتصور الدالة فى هذا الإطار ، فإننا عادة ما نطلق عليها **راسما** (أحيانا **تطبيقا**) Mapping أو **تحويلا** Transformation. **صورة** Image النقطة z فى نطاق التعريف S هى النقطة $w = f(z)$ ، وفئة صور جميع نقط فئة جزئية T من S تسمى صورة T . وصورة نطاق التعريف S للدالة f تسمى **مدى** Range الدالة f . الصورة العكسية Inverse image للنقطة w هى فئة جميع النقط z فى نطاق تعريف f التى لها نفس الصورة w . الصورة العكسية لنقطة ما قد تحوى نقطة واحدة أو أكثر من نقطة ، أو قد تكون الفئة الخالية ؛ والحالة الأخيرة تنشأ بطبيعة الحال عندما تكون w غير محتواة فى مدى f .

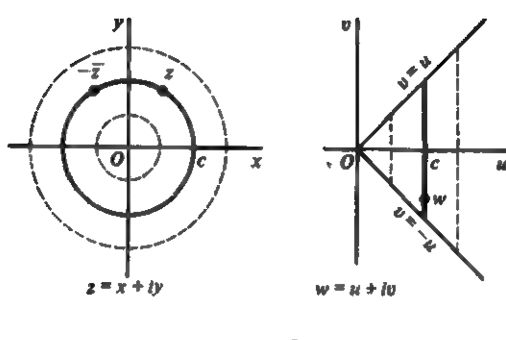
مفاهيم مثل **الانتقال** Translation، **الدوران** Rotation و **الانعكاس** Reflection تستخدم لإبراز خصائص هندسية غالبة لرواسم معينة . وقد يكون من المفيد فى مثل هذه الحالات اعتبار المستويين المركبين w,z كمستوى واحد . وعلى سبيل المثال الراسم $w = z+1$ يمكن اعتباره انتقال مقياسه الوحدة على اليمين لكل نقطة z . والراسم $w = iz$ يمكن اعتباره دورانا مقياسه $\pi/2$ فى اتجاه مضاد لدوران عقرب الساعة وذلك لكل عدد مركب غير صفرى z ؛ والراسم $w = \bar{z}$ هو تحويل يرسم كل نقطة z إلى صورتها بالانعكاس بالنسبة للمحور الحقيقى .

يمكن فى العادة الحصول على معلومات أكثر عن الدوال بعمل مخططات بيانية لصور لمنحنيات أو مناطق ، وذلك بدلا عن الإشارة ببساطة إلى صور بعض النقط المفردة . وكتوضيح لذلك فإن الدالة

$$f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} - iy$$

ترسم Maps نقط الدائرة $x^2+y^2 = c^2$ ، حيث $c \geqq 0$ ، فوق نقط الخط المستقيم $u=c$ وذلك لأن $u = \sqrt{x^2+y^2}$. حيث أن $v = -y$ وحيث أن y تأخذ قيما تتراوح من $-c$ إلى c ، فإن صورة الدائرة هى فى الواقع القطعة المستقيمة $u = c$ ، $-c \leqq v \leqq c$

(شكل (١٢)) . وحيث أن النقطتين $z = (x,y)$, $-\bar{z} = (-x,y)$ لهما نفس الصورة w ، فإن كل نقطة على هذه القطعة المستقيمة ، فيما عدا نقطتى النهاية ، تكون صورة لنقطتين على الدائرة .



(شكل ١٢)

ونطاق تعريف هذه الدالة هو المستوى المركب z بأكمله ، وكل نقطة z تقع على دائرة من هذه الدوائر وذلك لأن c عدد حقيقى ثابت غير سالب . وكما أسلفنا فإن صورة كل دائرة تكون قطعة مستقيمة ، كما أن كل قطعة من هذه القطع المستقيمة هى صورة لواحدة فقط من هذه الدوائر . وعليه فإن مدى هذه الدالة هو ربع المستوى :

$$u \geqq 0, \qquad -u \leqq v \leqq u.$$

١١ – النهايات Limits

لتكن f دالة معرفة لجميع نقط جوار ما لنقطة z_0 ، اللهم فيما عدا النقطة z_0 نفسها . التقرير القائل بأن العدد المركب w_0 هو نهاية Limit الدالة f عندما تقترب z من z_0 ، والمعبر عنه رمزيا على الصورة

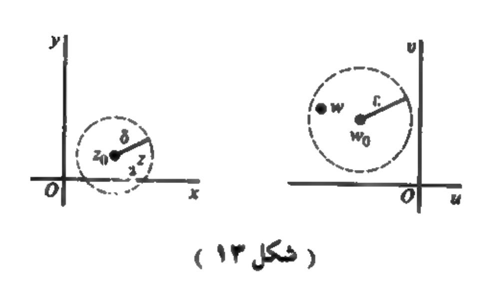
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0, \tag{١}$$

يعنى أن النقطة $w = f(z)$ يمكن جعلها قريبة قربا اختيارياً من w_0 وذلك بإختيار مناسب للنقطة z لتكون قريبة قربا كافيا من z_0 وعلى أن تكون z مختلفة عن z_0. والآن سنقوم بصياغة هذا التعريف للنهاية فى صورة محددة دقيقة وعملية .

التقرير (١) يعنى أن لكل عدد حقيقى موجب ε يوجد عدد حقيقى موجب δ بحيث

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{طالما كان} \quad 0 < |z - z_0| < \delta. \tag{٢}$$

وهذا التعريف يعنى هندسيا أنه لكل جوار ε ، $|w-w_0|<\varepsilon$، للنقطة w_0 يوجد جوار δ ، $|z-z_0|<\delta$، للنقطة z_0 بحيث تكون صور جميع نقط الجوار δ ، مع احتمال إمكانية استبعاد النقطة z_0 ، واقعة جميعا فى الجوار ε (شكل (١٣)) . ونشير إلى أنه ليس من الضرورى أن تغمر هذه الصور الجوار ε بأكمله ؛ وعلى أية حال فإن النقط z تشمل النطاق $0<|z-z_0|<\delta$ بأكمله . لاحظ أيضاً أن z يمكن لها أن تقترب من z_0 بأية طريقة كانت ، وليس فى اتجاه معين خاص .



(شكل ١٣)

تعريف (٢) يتطلب أن تكون الدالة f معرفة لجميع نقط جوار ما للنقطة z_0 ، مع احتمال استبعاد z_0 نفسها . مثل هذا الجوار له وجود بطبيعة الحال إذا كانت النقطة z_0 نقطة داخلية لمنطقة فى نطاق تعريف f . ويمكن لنا توسيع تعريف النهاية ليشمل الحالة التى تكون فيها z_0 نقطة حدية لهذه المنطقة وذلك إذا اتفقنا على أن تتحقق المتباينة $|f(z)-w_0|<\varepsilon$ فى (٢) لجميع النقط z المنتمية لكل من المنطقة والنطاق $0<|z-z_0|<\delta$ (أى لجميع نقط تقاطع الفئتين) .

التعريف (٢) يمدنا بطريقة لاختبار إمكانية أن تكون نقطة معينة نهاية ما ، إلا أنه مع ذلك لا يعطينا وسيلة لتعيين هذه النهاية . ونظريات النهايات ، التى سنعرضها فى هذا الفصل ، ستمكننا بالفعل من حساب العديد من النهايات .

اعتبر الآن الدالة $f(z)=iz/2$ المعرفة على القرص الدائرى المفتوح $|z|<1$. سنبين أن

$$\lim_{z\to 1}\frac{iz}{2}=\frac{i}{2},$$

النقطة $z=1$ هى نقطة حدية لنطاق تعريف الدالة . لاحظ أنه إذا كانت z واقعة فى المنطقة $|z|<1$ (راجع تعريف المنطقة فى بند (٧)) فإن

$$\left|f(z)-\frac{i}{2}\right|=\left|\frac{iz}{2}-\frac{i}{2}\right|=\frac{|z-1|}{2}.$$

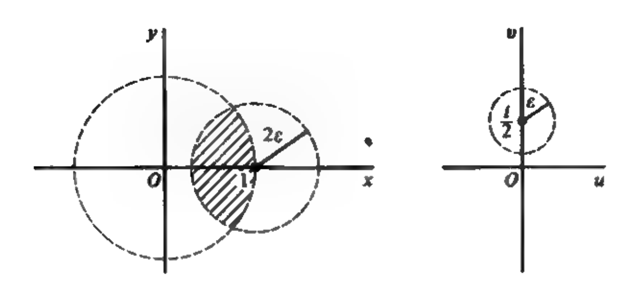
وعليه فإنه لمثل هذه النقطة z ولكل عدد صحيح موجب ε يكون ،

$$\left|f(z)-\frac{i}{2}\right|<\varepsilon \quad \text{طالما} \quad 0<|z-1|<2\varepsilon.$$

أى أن الشرط (٢) متحقق إذا أخذنا δ مساويةللمقدار 2ε (شكل (١٤)) أو أى عدد موجب أصغر منه .

لإعطاء توضيح أكثر للتعريف (٢) سنبرهن الآن أن

$$\lim_{z\to 2i} (2x + iy^2) = 4i \qquad (z = x + iy) \qquad (٣)$$



(شكل ١٤)

الآن لكل عدد موجب، ε يتعين علينا إيجاد عدد موجب δ بحيث

$$|2x + iy^2 - 4i| < \varepsilon. \quad \text{طالما} \quad 0 < |z - 2i| < \delta. \qquad (٤)$$

وللوصول إلى ذلك ، نكتب

$$|2x + iy^2 - 4i| \leqq 2|x| + |y^2 - 4| = 2|x| + |y - 2|\,|y + 2|$$

نلاحظ أن المتباينة اليمنى فى (٤) تتحقق طالما كان

$$|y - 2|\,|y + 2| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad \text{و} \quad 2|x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

المتباينة الأولى (اليمنى) متحققة بطبيعة الحال إذا كان $|x| < \varepsilon/4$. لإيجاد الشروط التى يجب وضعها على y حتى تحقق المتباينة الثانية نلاحظ أنه إذا قيدت y بالشرط $|y - 2| < 1$ فإن

$$|y + 2| = |(y - 2) + 4| \leqq |y - 2| + 4 < 5$$

وعليه يكون

$$|y - 2|\,|y + 2| < \left(\frac{\varepsilon}{10}\right)5 = \frac{\varepsilon}{2}$$

وذلك طالما كان $|y - 2| < \min\,\{\varepsilon/10, 1\}$ حيث $\min\,\{\varepsilon/10, 1\}$ تعنى صغرى القيمتين $\varepsilon/10$ و ١ . يتبين لنا الآن أن الشرطين $|x| < \varepsilon/4$ و $|y - 2| < \min\,\{\varepsilon/10, 1\}$ يمكناننا من إيجاد قيمة مناسبة للمقدار δ هى

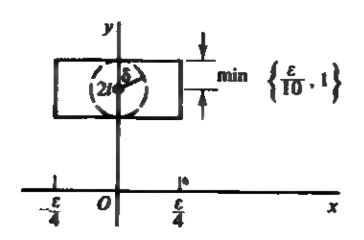
$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{10}, 1\right\}$$

(انظر شكل (١٥)) .

لقد افترضنا ضمنيا أنه إذا وجدت لدالة f نهاية فإن هذه النهاية تكون وحيدة .

والواقع أن هذه حقيقة واقعة ، ولبرهان ذلك نفرض أن

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \qquad و \qquad \lim_{z\to z_0} f(z) = w_1$$



(شكل ١٥)

حيث $w_0 \neq w_1$. وعليه فإن لكل عدد حقيقى موجب اختيارى ε توجد أعداد حقيقية موجبة δ_1 ، δ_0 بحيث

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{طالما} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_0$$

و

$$|f(z) - w_1| < \varepsilon \quad \text{طالما} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_1.$$

وعليه فإذا كتبنا $\varepsilon = |w_0 - w_1|/2$ وأخذنا δ لتكون صغرى القيمتين δ_0 و δ_1 فإن المتباينة التالية تكون صحيحة لجميع z المحققة للمتباينة $0 < |z - z_0| < \delta$؛

$$|w_0 - w_1| = |[f(z) - w_1] - [f(z) - w_0]|$$
$$\leqq |f(z) - w_1| + |f(z) - w_0| < 2\varepsilon = |w_0 - w_1|.$$

لكن استحالة تحقق المتباينة $|w_0 - w_1| < |w_0 - w_1|$ تجعلنا نستنتج أن نهاية الدالة تكون وحيدة . وفى نهاية هذا البند يجدر بنا أن نشير إلى أنه يمكننا بسهولة إعطاء معنى للتقرير

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \tag{٥}$$

وذلك عندما يكون أى من العددين w_0, z_0 أو كلاهما نقطة اللانهاية . وكل ما نفعله هنا هو أن نستبدل الجوارات المناسبة للعددين w_0, z_0 بجوارات لنقطة اللانهاية . وعلى سبيل المثال فالتقرير

$$\lim_{z\to \infty} f(z) = w_0 \tag{٦}$$

يعنى أنه لكل عدد حقيقى موجب ε يوجد عدد حقيقى موجب δ بحيث

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{طالما} \quad |z| > \frac{1}{\delta}$$

أى أن النقطة $f(z)$ تقع فى الجوار $|w - w_0| < \varepsilon$ للنقطة w_0 طالما وقعت z فى الجوار $|z| > 1/\delta$ لنقطة اللانهاية .

ولتوضيح ذلك نلاحظ أن

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^2} = 0$$

وذلك لأن

$$\left|\frac{1}{z^2}-0\right|<\varepsilon \quad \text{طالما} \quad |z|>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

أى أنه يمكننا أخذ $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ فى هذه الحالة

تعريف النهاية فى الحالة التى تكون فيها w_0 فى (٥) هى نقطة اللانهاية ، وكذلك فى الحالة التى تكون فيها كل من w_0, z_0 نقطة اللانهاية ، سنتركه للتمارين التى تشتمل على أمثلة محددة .

١٢ – نظريات على النهايات Theorems on Limits

يمكن لنا تسهيل معالجة النهايات عن طريق إيجاد علاقة بين نهاية دالة متغير مركب ونهايتى دالتين حقيقيتين كل منهما دالة متغيرين حقيقيين ، والنهايات من هذا النوع الأخير سبق معالجتها فى حساب التفاضل للمتغيرات الحقيقية ، وعليه سنستخدم هنا بحرية تعاريف وخصائص هذه النهايات (نعنى تعاريف وخصائص نهايات الدوال الحقيقية لمتغيرين حقيقيين) .

نظرية ١ : نفرض أن

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y), \qquad z_0=x_0+iy_0, \qquad w_0=u_0+iv_0$$

إذن

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0 \tag{١}$$

إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0 \quad \text{و} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0 \tag{٢}$$

لبرهان النظرية سنفرض أولا صحة التقرير (١) ثم نبرهن صحة الشروط (٢) . ووفقاً للتقرير (١) ، يوجد لكل عدد موجب ε عدد موجب δ بحيث

$$|u(x,y)-u_0+i[v(x,y)-v_0]|<\varepsilon \quad \text{طالما} \quad 0<|x-x_0+i(y-y_0)|<\delta$$

وحيث أن

$$|u(x,y)-u_0| \leqq |u(x,y)-u_0+i[v(x,y)-v_0]|$$

و

$$|v(x,y)-v_0| \leqq |u(x,y)-u_0+i[v(x,y)-v_0]|,$$

نجد أن

$$|u(x,y)-u_0|<\varepsilon \quad \text{و} \quad |v(x,y)-v_0|<\varepsilon$$

طالما $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$ وهذا يبين صحة الشروط (٢) .

دعنا الآن نفترض صحة الشروط (٢) . لكل عدد موجب ε يوجد عددان موجبان

δ_1 و δ_2 بحيث

$$|v(x,y) - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{طالما} \quad 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_1^2$$

و

$$|u(x,y) - u_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{طالما} \quad 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_2^2$$

لتكن δ صغرى القيمتين δ_1 و δ_2 . حيث أن

$$|u(x,y) - u_0 + i[v(x,y) - v_0]| \leqq |u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - v_0|,$$

نجد أن

$$|u(x,y) + iv(x,y) - (u_0 + iv_0)| < \varepsilon \quad \text{طالما} \quad 0 < |x + iy - (x_0 + iy_0)| < \delta.$$

وهذا هو التقرير (١) ، ومنه يكون برهان النظرية قد استكمل .

نظرية ٢ : نفرض أن

$$\lim_{z \to z_0} F(z) = W_0 \quad \text{و} \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \qquad (٣)$$

إذن

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) + F(z)] = w_0 + W_0, \qquad (٤)$$

$$\lim_{z \to z_0} [f(z)F(z)] = w_0 W_0, \qquad (٥)$$

و

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{w_0}{W_0} \quad \text{بشرط أن} \quad W_0 \neq 0 \qquad (٦)$$

برهان هذه النظرية الأساسية يمكن الحصول عليه بشكل مباشر من تعريف نهاية دالة متغير مركب (بند (١١)) . إلا أنه يمكن الحصول على نظرية (٢) بشكل أسرع وذلك باستخدام نظرية (١) وكذلك نظريات النهايات للدوال الحقيقية لمتغيرين حقيقيين .

حتى نعتبر برهان الخاصية (٥) ، مثلا ، نكتب

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad F(z) = U(x,y) + iV(x,y),$$

$$z_0 = x_0 + iy_0, \qquad w_0 = u_0 + iv_0, \qquad W_0 = U_0 + iV_0.$$

من الغرض (٣) ونظرية (١) ، نرى أنه عندما تقترب (x,y) من (x_0,y_0) يكون لنهايات الدوال u,v,U,V وجود، ألا وهى u_0,v_0,U_0,V_0 على التعاقب . وعليه فتكون نهايتى الجزئين الحقيقى والتخيلى للدالة

$$f(z)F(z) = u(x,y)U(x,y) - v(x,y)V(x,y) + i[v(x,y)U(x,y) + u(x,y)V(x,y)]$$

هما $u_0U_0 - v_0V_0$، $v_0U_0 + u_0V_0$ على التعاقب وذلك عندما تقترب (x,y) من (x_0,y_0) .

وعليه فإن $f(z)F(z)$ يكون لها النهاية

$$u_0 U_0 - v_0 V_0 + i(v_0 U_0 + u_0 V_0) = w_0 W_0.$$

وذلك عندما تقترب z من z_0 . وبهذا يكتمل برهان خاصية (٥) .

من تعريف النهاية نرى أنه لكل z_0

$$\lim_{z \to z_0} z = z_0$$

وذلك لأنه يمكن اعتبار $\delta = \varepsilon$ فى حالة ما إذا كانت $f(z) = z$. وعليه فمن الخاصية (٥) وباستخدام الاستنتاج الرياضى يكون

$$\lim_{z \to z_0} z^n = z_0^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

وكمثال آخر نقول إنه عندما يكون c عدداً مركبا ثابتا فإن

$$\lim_{z \to z_0} c = c.$$

من ذلك وعلى ضوء الخاصيتين (٤) ، (٥) نجد أن نهاية كثيرة الحدود

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0)$$

عندما تقترب z من z_0 هى قيمة كثيرة الحدود عند هذه النقطة ، أى أن

$$\lim_{z \to z_0} P(z) = P(z_0). \qquad (٧)$$

خاصية أخرى هامة للنهايات هى

(٨) إذا كان $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ فإن $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |w_0|$

والتى يمكن الحصول على برهانها بسهولة باستخدام التعريف والمتباينة

$$||f(z)| - |w_0|| \leqq |f(z) - w_0|.$$

وفى النهاية نشير إلى أن نتائج هذا البند تستخدم فقط نقط المستوى **المحدود** . وكما أشرنا فى بند (٨) ، فلن نعتبر نقطة اللانهاية إلا إذا ذكرنا ذلك صراحة .

تمـــارين

١ – لكل من الدوال المعرفة التالية صف نطاق التعريف الممكن

(أ) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$ ؛ (ب) $f(z) = \operatorname{Arg}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ ؛ (جـ) $f(z) = \dfrac{z}{z + \bar{z}}$ ؛ (د) $f(z) = \dfrac{1}{1 - |z|^2}$.

الأجوبة : (أ) $z \neq \pm i$ ؛ (جـ) $\operatorname{Re} z \neq 0$

٢ – مثل بيانيا نطاق تعريف الدالة

$$g(z) = \frac{y}{x} + \frac{i}{1 - y}.$$

اثبت أن $g(z) = f(z)$ وذلك لجميع z فى نطاق تعريف الدالة f المبينة فى معادلة (٢) من بند (٩) .

٣ – اكتب الدالة $f(z) = z^3 + z + 1$ على الصورة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

٤ – ليكن $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$. باستخدام المتطابقات (٩) لبند (٣) ، عَبّر ، ومن ثم بَسّط ، عن f(z) بدلالة z .

الإجابة : $\bar{z}^2 + 2iz$

٥ – فى شكل (١٢) اعتبر أن النقطة z تتحرك على الدائرة $x^2 + y^2 = c^2$ فى اتجاه مضاد

لعقرب الساعة وذلك ابتداءا من النقطة (c,0) . صف المسار المناظر للنقطة
$w = \sqrt{x^2 + y^2} - iy$

٦ – لتكن a, c, z_0 اعداداً مركبة ثابتة . استخدم تعريف (٢) من بند (١١) لبرهان كل من
(أ) $\lim_{z \to z_0} c = c$ ؛ (ب) $\lim_{z \to z_0} (az + c) = az_0 + c$ ؛ (جـ) $\lim_{z \to z_0} (z^2 + c) = z_0^2 + c$ ؛
(د) $\lim_{z \to z_0} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0$ ؛ (هـ) $\lim_{z \to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$ ؛ (و) $\lim_{z \to 1-i} [x + i(2x + y)] = 1 + i$ ؛
(ز) $\lim_{z \to 0} (\bar{z}^2/z) = 0$

٧ – برهن القضية (٤) من نظرية (٢)بند (١٤)
(أ) باستخدام نظرية (١)بند (١٢)وكذلك خواص نهايات الدوال الحقيقية ،
(ب) بالاستخدام المباشر لتعريف (٢) بند(١١) للنهاية .

٨ – ليكن n عددا صحيحا موجبا وP(z), Q(z) كثيرات حدود حيث $Q(z_0) \neq 0$. استخدم نظرية (٢) بند (١٢) وكذلك النهايات المبرهنة لإيجاد
(أ) $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{z^n} (z_0 \neq 0)$ ؛ (ب) $\lim_{z \to i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}$ ؛ (جـ) $\lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{Q(z)}$

الأجوبة : (أ) $1/z_0^n$ ؛ (ب) 0 ؛ (جـ) $P(z_0)/Q(z_0)$

٩ – بوضع $\Delta z = z - z_0$ اثبت أن $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0$

١٠ – بفرض أن $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$ برهن أن $\lim_{z \to z_0} f(z) g(z) = 0$ إذا أمكن إيجاد عدد موجب M بحيث $|g(z)| \leq M$ لجميع النقط z في جوار ما يحوى z_0 .

١١ – فسر التقرير (٥) من بند (١١) لكل من الحالتين الآتيتين :
(أ) w_0 هي نقطة اللانهاية ،
(ب) النقطتان z_0, w_0 كلاهما نقطة اللانهاية

١٢ – استخدم تعريفا للنهاية متضمنا لنقطة اللانهاية لبرهان كل من :
(أ) $\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z^2 + 1} = 0$ ؛ (ب) $\lim_{z \to 1} \frac{1}{(z - 1)^3} = \infty$ ؛ (جـ) $\lim_{z \to \infty} 3z^2 = \infty$.

١٣ – اثبت أن النهاية من نوع (٦) لبند (١١) تكون وحيدة

١٤ – برهن خاصية (٨) بند (١٢) .

١٥ – لتكن الدالة $f(z) = e^x e^{iy}$ $(z = x + iy)$ معرفة على المستوى المركب بأكمله .
(أ) إذا كان $w_0 \neq 0$ ، اثبت أنه يوجد عدد لانهائي من النقط z في أى جوار للنقطة ∞ بحيث $f(z) = w_0$.
(ب) بين أن $\lim_{z \to \infty} f(z)$ ليس لها وجود (بما فى ذلك ∞).

١٦ – تفسير آخر للمعادلة $w = f(z)$ هو ما يعرف بالمجال الاتجاهى Vector field فى نطاق تعريف الدالة f . لكل نقطة (x,y) فى نطاق تعريف الدالة تعين هذه المعادلة متجها w مركباته $u(x,y), v(x,y)$. بين بمخططات بيانية المجالات الاتجاهية الممثلة بالمعادلات
(أ) $w = iz$ ، (ب) $w = \frac{z}{|z|}$

١٣ – الاتصال Continuity

يقال لدالة f أنها متصلة continuous عند النقطة z_0 إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية مجتمعة :

(١) النهاية $\lim_{z\to z_0} f(z)$ لها وجود ،

(٢) $f(z_0)$ لها وجود (أى أن f معرفة عند z_0) ،

(٣) $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

لاحظ أن التقرير (٣) يتضمن بالفعل التقريرين (١) ، (٢) ، ذلك أن الشرط (٣) فى كينونته يفترض وجود القيم المعنية فى الطرفين . الشرط (٣) يقرر أنه لكل عدد موجب ε يوجدعدد موجب δ بحيث

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{طالما} \quad |z - z_0| < \delta \tag{٤}$$

يقال لدالة متغير مركب أنها متصلة فى منطقة R إذا كانت متصلة عند جميع نقط المنطقة R .

إذا كانت هناك دالتان متصلتان عند نقطة ، فإن كلا من مجموعهما وحاصل ضربهما دالة متصلة عند نفس النقطة ؛ كما أن حاصل قسمة الدالتين يكون متصلا عند هذه النقطة بشرط أن يكون المقام مغايرا للصفر عند هذه النقطة . هذه الملاحظات هى نتائج مباشرة لنظرية (٢) بند (١٢) . لاحظ أيضاً أن المعادلة (٧) بند (١٢) تبين أن كثيرة الحدود دالة متصلة فى المستوى المركب بأكمله .

دعنا الآن نبين مباشرة من التعريف (٤) أن تحصيل الدوال المتصلة **Composition of continuous functions** يكون بدوره دالة متصلة . وحتى نكون محددين ، نفرض أن f دالة معرفة على جوار لنقطة z_0 ، ولنفرض أيضاً أن صورة هذا الجوار محتوى فى منطقة فى نطاق تعريف الدالة g . وعليه تكون الدالة المحصلة $g[f(z)]$ معرفة لجميع z فى هذا الجوار للنقطة z_0 . إذا كانت الآن f متصلة عند z_0 وكانت g متصلة عند $f(z_0)$ ، فإن الدالة المحصلة $g[f(z)]$ تكون متصلة عند z_0 ؛ ذلك أنه على ضوء اتصال g ، نعلم أنه لكل عدد موجب ε يوجد عدد موجب γ بحيث

$$|g[f(z)] - g[f(z_0)]| < \varepsilon \quad \text{طالما} \quad |f(z) - f(z_0)| < \gamma.$$

لكن γ يناظره عدد موجب δ تتحقق معه المتباينة اليسرى أعلاه وذلك طالما كان $|z - z_0| < \delta$ ؛ وهذا يبرهن اتصال الدالة المحصلة.

من نظرية (١) بند (١٢)،انتبين أن دالة متغير مركب f تكون متصلة عند النقطة $z_0 = (x_0, y_0)$ إذا وفقط إذا كانت كل من مركبتيها v,u دالة متصلة هناك .

من هذه النتيجة نرى ، على سبيل المثال ، أن الدالة $f(z) = xy^2 + i(2x-y)$ دالة متصلة فى المستوى المركب بأكمله وذلك لأن مركبتيها كثيرتى حدود فى x,y وهى بدورها متصلة عند كل نقطة (x,y) . بالمثل الدالة $f(z) = e^{xy} + i \sin(x^2-2xy^3)$ دالة متصلة لجميع z وذلك لاتصال كثيرات الحدود فى y,x وفى نفس الوقت اتصال كل من الدالة الأسية ودالة الجيب .

خصائص عديدة للدوال المتغير المركب المتصلة يمكن استنباطها من الخصائص المناظرة للدوال الحقيقية المتصلة فى متغيرين حقيقيين(١) .

لنفرض على سبيل المثال أن الدالة $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ متصلة فى منطقة R مغلقة ومحدودة؛ الدالة $\sqrt{[u(x,y)]^2 + [v(x,y)]^2}$ هى إذن متصلة فى R ومن ثم يكون لها قيمة عظمى عند نقطة ما ، أو أكثر ، من R . وهذا يعنى أن الدالة f تكون محدودة Bounded فى R وأن $|f(z)|$ تصل إلى قيمة عظمى فى R . وحتى نكون أكثر تحديداً ، فإنه يوجد عدد موجب M بحيث

$$|f(z)| \leq M \quad \text{لجميع } z \text{ فى } R \text{ ،}$$

وأن
$$|f(z)| = M \quad \text{عند نقطة واحدة على الأقل فى } R \text{ .}$$

ونتيجة أخرى يمكن الحصول عليها من نظيرتها الخاصة بالدوال الحقيقية فى متغيرين حقيقيين تنص على أن أى دالة f متصلة فى منطقة مغلقة ومحدودة R لابد وأن تكون **منتظمة الاتصال** Uniformly continuous هناك ؛ وهذا يعنى أنه يمكن إيجاد قيمة وحيدة δ ، غير معتمدة على z_0 ، ومحققة للشرط (٤) لجميع النقط z_0 فى المنطقة R .

١٤ – المشتقات Derivatives

لتكن f دالة يحتوى نطاق تعريفها على جوار للنقطة z_0 . نعرف **مشتقة** Drivative الدالة f عند النقطة z_0 ، والتى يرمز لها بالرمز $f'(z_0)$ ، على النحو الآتى :

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (١)$$

وذلك بشرط وجود هذه النهاية . يقال أن الدالة f **قابلة للاشتقاق** Differentiable عند النقطة z_0 إذا أمكن إيجاد مشتقتها عند z_0 .

إذا عبرنا فى التعريف (١) عن المتغير المركب z بدلالة المتغير المركب الجديد

$$\Delta z = z - z_0,$$

---

(١) لمثل هذه الخصائص المستخدمة هنا نشير على سبيل المثال إلى كتاب "Advanced Calcuius" تأليف W.R. Mann, و A.E. Taylor الطبعة الثانية ص ١٣٥ – ١٣٦، ١٩٧٢

فإنه يمكننا كتابة التعريف (١) على الصورة

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \qquad (٢)$$

حيث إن f معرفة على جوار للنقطة z_0 ، فإننا نلاحظ أن $f(z_0 + \Delta z)$ دائماً له وجود لجميع قيم $|\Delta z|$ الصغيرة صغرا كافيا .

إذا اعتبرنا الصيغة (٢) لتعريف المشتقة ، فإننا كثيرا ما نسقط الدليل تحت z_0 ونستخدم المقدار

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$$

الذى يشير للتغير فى $w = f(z)$ المناظر للتغير Δz فى المتغير z . وعليه فإذا كتبنا dw/dz ليدل على $f'(z)$ ، تصبح (٢) على الصورة

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \qquad (٣)$$

افرض على سبيل المثال أن $f(z) = z^2$. لكل نقطة z ، يكون

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

وذلك لأن $2z + \Delta z$ كثيرة حدود فى Δz . وعليه فإن $dw/dz = 2z$ أو $f'(z) = 2z$.

لنفحص الآن الدالة $f(z) = |z|^2$. هنا

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.$$

وعندما تكون $z = 0$ ، فإن $\Delta w/\Delta z = \overline{\Delta z}$ ؛ وعليه تكون $dw/dz = 0$ عند نقطة الأصل . إذا كانت نهاية $\Delta w/\Delta z$ لها وجود عندما $z \neq 0$ فإن هذه النهاية (وحيدة القيمة) يمكن الحصول عليها بأن نترك Δz تقترب من الصفر بأية طريقة شئنا . إذا تركنا ، على سبيل التخصيص ، Δz تقترب من الصفر خلال قيم حقيقية فإن $\overline{\Delta z} = \Delta z$ ، ويتضح أن نهاية $\Delta w/\Delta z$ هى $\bar{z} + z$. أما إذا جعلنا Δz تقترب من الصفر خلال قيم تخيلية صرفة فإن $\overline{\Delta z} = -\Delta z$ وعليه تكون النهاية هى $z - \bar{z}$. وحيث إن أى نهاية وحيدة ، فإنه يتبين لنا أن dw/dz ليس لها وجود عندما $z \neq 0$ ؛ وبالتالى فإن dw/dz لها وجود فقط عند نقطة الأصل .

هذا المثال يبين أن دالة ما قد تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة ما ولا تكون قابلة للاشتقاق عند أى نقطة أخرى فى أى جوار لتلك النقطة . كما يبين المثال أيضاً أنه بينما تكون الأجزاء الحقيقية والتخيلية لدالة ما لمتغير مركب لها مشتقات جزئية متصلة لجميع الرتب عند نقطة ما ، إلا أنها قد تكون مع ذلك ليست قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة . ففى المثال $f(z) = |z|^2$ قيد البحث ، نعلم أن الأجزاء الحقيقية والتخيلية هى

$$u(x,y) = x^2 + y^2 \qquad و \qquad v(x,y) = 0$$

على التعاقب

لاحظ أن الدالة $f(z) = |z|^2$ متصلة عند كل نقطة فى المستوى . وعليه فإن اتصال دالة عند نقطة ما لا يستلزم بالضرورة وجود المشتقة عند تلك النقطة . إلا أنه ، مع ذلك ، توجد حقيقة واقعة تنص على أن : **وجود المشتقة لدالة ما عند نقطة ما يستلزم بالضرورة اتصال هذه الدالة عند تلك النقطة** . لبرهان ذلك ، نفرض أن $f'(z_0)$ لها وجود . الآن

$$\lim_{z\to z_0}[f(z) - f(z_0)] = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\lim_{z\to z_0}(z - z_0) = 0$$

ومنه نستنتج أن

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

وهو شرط اتصال f عند z_0 .

١٥ – صيغ الاشتقاق Differentiation Formulas

تعريفنا للمشتقة يطابق فى صورته تعريف مشتقة الدالة الحقيقية فى متغير حقيقى . وفى الواقع فإن صيغ الاشتقاق الأساسية المعطاة فيما يلى يمكن الحصول عليها من التعريف بالإضافة إلى نظريات مختلفة عن النهايات وذلك باستخدام نفس الخطوات ، فى الأساس ، المستخدمة فى حساب التفاضل لدوال المتغير الحقيقى . فى هذه الصيغ ، سيرمز لمشتقة الدالة f عند النقطة z بأحد الرمزين $f'(z)$ أو $d[f(z)]/dz$ وذلك حسبما يكون أى الرمزين أكثر ملائمة .

ليكن c عددًا مركبا ثابتا ، ولنفرض أن f دالة قابلة للاشتقاق عند نقطة z . من السهولة إثبات أن

$$\frac{d}{dz}c = 0, \qquad \frac{d}{dz}z = 1, \qquad \frac{d}{dz}[cf(z)] = cf'(z). \tag{١}$$

وأيضاً ، إذا كانت لمشتقى الدالتين F,f وجود فإن

$$\frac{d}{dz}[f(z) + F(z)] = f'(z) + F'(z) \tag{٢}$$

$$\frac{d}{dz}[f(z)F(z)] = f(z)F'(z) + F(z)f'(z) \tag{٣}$$

وعندما تكون $F(z) \neq 0$ ، فإن

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{F(z)}\right] = \frac{F(z)f'(z) - f(z)F'(z)}{[F(z)]^2}. \tag{٤}$$

إذا كان n عددًا صحيحا موجبا فإن

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$$

عند كل نقطة z .

وهذه الصيغة صحيحة أيضاً عندما يكون n عددًا صحيحا سالبا وذلك بشرط أن تكون $z \neq 0$.

لاستنباط الصيغة (٣) ، مثلاً ، نكتب

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z), \qquad \Delta W = F(z+\Delta z) - F(z)$$

إذن

$$\frac{f(z+\Delta z)F(z+\Delta z) - f(z)F(z)}{\Delta z} = f(z)\frac{\Delta W}{\Delta z} + F(z)\frac{\Delta w}{\Delta z} + \Delta w\frac{\Delta W}{\Delta z}$$

لاحظ أن f متصلة عند z وذلك لكونها قابلة للاشتقاق عندها ؛ وعليه فإن Δw تؤول إلى الصفر عندما تؤول Δz إلى الصفر . الآن يمكن الحصول على الصيغة (٣) وذلك فى ضوء نظريات النهايات للمجموع وحاصل الضرب .

توجد أيضاً قاعدة السلسلة لمشتقة تحصيل دالتين . لنفرض أن الدالتين g,f قابلتان للاشتقاق عند النقطتين $f(z_0), z_0$ على التتابع . إذن الدالة $F(z)=g[(z)]$ لها مشتقة عند z_0 ويكون

$$F'(z_0) = g'[f(z_0)]f'(z_0) \tag{٦}$$

إذا كتبنا $W=g(w),\ w=f(z)$ فإننا نلاحظ أن قاعدة السلسلة للدالة $F(z)=W$ تصبح

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw}\frac{dw}{dz}$$

ولتوضيح ذلك دعنا نحسب مشتقة $(2z^2+i)^5$. إذا وضعنا $W=w^5,\ w=2z^2+1$ فإن

$$\frac{d}{dz}(2z^2+i)^5 = 5w^4 4z = 20z(2z^2+i)^4.$$

لبرهان الصيغة (٦) نختار ابتداء نقطة معينة z_0 بحيث $f'(z_0)$ لها وجود . ضع $w_0=f(z_0)$ وافترض أيضاً أن $g'(w_0)$ لها وجود . يوجد الآن جوار ما $|w-w_0|<\varepsilon$ بحيث يمكننا تعريف الدالة الآتية ، لجميع النقط w فى هذا الجوار ،

$$\Phi(w) = \begin{cases} \dfrac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} - g'(w_0) & (w \neq w_0), \\ 0 & (w = w_0). \end{cases} \tag{٧}$$

على ضوء تعريف (١) بند (١٤) للمشتقة ، نلاحظ أن

$$\lim_{w\to w_0} \Phi(w) = 0 \tag{٨}$$

حيث أن $f'(z_0)$ لها وجود — ومن ثم فإن $f(z)$ تكون متصلة عند z_0 — فإنه يمكننا اختيار عدد موجب δ بحيث تقع النقطة f(z) فى الجوار $|w-w_0|<\varepsilon$ للنقطة wo وذلك إذا وقعت z فى الجوار $|z-z_0|<\delta$ للنقطة z_0 . وعليه فإنه يحق لنا استبدال w فى التعبير (٧) بالعدد f(z) طالما كانت z نقطة فى الجوار $|z-z_0|<\delta$. إذن باستخدام التعويضين $w_0=f(z_0), w=f(z)$ فإن التعبير (٧) يؤول إلى

$$\frac{g[f(z)]-g[f(z_0)]}{z-z_0} = \{g'[f(z_0)] + \Phi[f(z)]\}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{٩}$$

حيث $0 < |z - z_0| < \delta$ ،

مع النص على أن $z \neq z_0$ وذلك حتى لا يسمح لنا بالقسمة على الصفر . الآن f متصلة عند z_0 ، Φ متصلة عند $w_0 = F(z_0)$ وذلك بسبب المعادلة (٨) وحقيقة أن $\Phi(w_0) = 0$. وعليه فإن الدالة المحصلة $\Phi[f(z)]$ تكون متصلة عند z_0 و

$$\lim_{z \to z_0} \Phi[f(z)] = 0$$

وبأخذ النهاية عندما تقترب z من z_0 ، فإن المعادلة (٩) تؤول إلى

$$F'(z_0) = g'[f(z_0)]f'(z_0)$$

تمـــارين

١ – اثبت أن الدالة $f(z) = |z|^2$ متصلة فى المستوى المركب بأكمله.

٢ – استخدم نتائج بند (١٥) لإثبات أن مشتقة كثيرة الحدود

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \qquad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

لها وجود عند كل نقطة وبأن $P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}$

٣ – استخدم نتائج بند (١٥) لإيجاد $f'(z)$ عندما

(أ) $f(z) = 3z^2 - 2z + 4$ ؛ (ب) $f(z) = (1 - 4z^2)^3$

(جـ) $f(z) = (z - 1)/(2z + 1)$ حيث $z \neq -1/2$

(د) $f(z) = [(1 + z^2)^4]/z^2$ حيث $z \neq 0$

٤ – بالتطبيق المباشر لتعريف المشتقة برهن أن $f'(z) = -1/z^2$ عندما تكون $f(z) = 1/z$ بشرط $z \neq 0$

٥ – استنبط صيغة (٢) من بند (١٥)

٦ – استخدم الاستنتاج الرياضى أو صيغة ذات الحدين (تمرين (١٧) بند (٢)). للحصول على صيغة (٥) بند (١٥) لمشتقة z^n عندما يكون n عددا صحيحا موجبا .

٧ – عمم نتيجة تمرين (٦) لتشمل الحالة التى يكون فيها n عددا صحيحا سالبا و $z \neq 0$.

٨ – طبق تعريف المشتقة لبرهنة أن $f'(z)$ ليس لها وجود عند أى نقطة وذلك فى الحالة $f(z) = \text{Re}\, z$.

٩ – برهن أن الدالة $f(z) = \bar{z}$ ليست قابلة للاشتقاق عند أى نقطة .

١٠ – بين ما إذا كانت الدالة $f(z) = \text{Im}\, z$ قابلة للاشتقاق عند أى نقطة .

١١ – اثبت أنه إذا كانت الدالة f متصلة عند نقطة z_0 فى نطاق ما وكانت $f(z_0) \neq 0$ فإنه يوجد جوار للنقطة z_0 بحيث تكون $f(z) \neq 0$ لجميع نقط هذا الجوار.

اقتراح : صغ أولا المتباينة الأولى من التعريف (٤) بند (١٣)للاتصال على الصورة $|f(z_0) - f(z)| < |f(z_0)|/2$ ، حيث $\varepsilon = |f(z_0)|/2$ ، ومن ثم لاحظ التناقض الناجم عند فرض $f(z) = 0$ عند نقطة ما لأى جوار للنقطة z_0 .

١٢ – إجر تعديلا لتعريف (٤) بند (١٣) للاتصال ليتناول الحالة التى تكون فيها $z_0 = \infty$ افعل نفس الشيء عندما تكون $f(z_0) = \infty$ وأيضاً عندما تكون كل من z_0 و $f(z_0)$ نقطة اللانهاية ، ومن ثم بين أن كلا من الدوال الآتية متصلةعند كل نقطة فى المستوى المركب الممتد

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & (z \neq 0, \infty), \\ \infty & (z = 0), \\ 0 & (z = \infty); \end{cases} \quad (أ)$$

$$f(z) = \begin{cases} 2z + 1 & (z \neq \infty), \\ \infty & (z = \infty). \end{cases} \quad (ب)$$

١٦ – معادلتا كوشى – ريمان The Cauchy-Riemann Equations

لتكن

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y). \quad (١)$$

دالة معرفة على جوار للنقطة z_0 .

فى هذا البند نحصل على شروط يتعين أن تحققها المركبات v,u وذلك حتى تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عند z_0 .

لنفرض أن المشتقة

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (٢)$$

لها وجود . بوضع $z_0 = x_0 + iy_0$ و $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$،نرى أن نظرية (١) بند (١٢) تعطينا

$$\mathrm{Re}\,[f'(z_0)] = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \mathrm{Re}\left[\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\right] \quad (٣)$$

و

$$\mathrm{Im}\,[f'(z_0)] = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \mathrm{Im}\left[\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\right] \quad (٤)$$

حيث

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0,y_0) + i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0,y_0)]}{\Delta x + i\Delta y}.$$

إذا اعتبرنا التغيير $\Delta z = \Delta x + i0$ على وجه التخصيص ، فإن النقطة $z_0 + \Delta z$ تكون $(x_0 + \Delta x, y_0)$ (شكل (١٦)) ويكون

$$\mathrm{Re}\,[f'(z_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

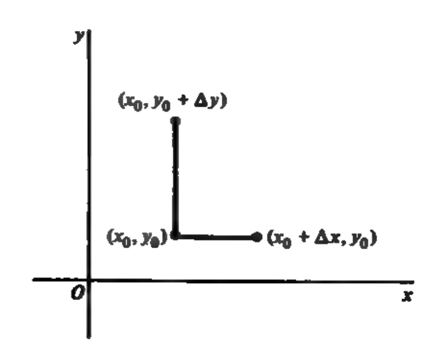
$$\mathrm{Im}\,[f'(z_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

وهذا يعنى أن

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0), \quad (٥)$$

حيث $v_x(x_0,y_0)$, $u_x(x_0,y_0)$ هما المشتقتان الجزئيتان الأوليان بالنسبة للمتغير x للدالتين v,u عند النقطة (x_0,y_0) .

وإذا اعتبرنا من ناحية أخرى التغير $\Delta z = 0 + i\,\Delta y$ ، فإن النقطة $z_0 + \Delta z$ تكون $(x_0,y_0 + \Delta y)$
وفى هذه الحالة فإن وجود $f(z_0)$ يستلزم وجود المشتقتين الجزئيتين الاوليين $u_y(x_0,y_0)$ ، $v_y(x_0,y_0)$ وأن



(شكل ١٦)

$$f'(z_0) = v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0). \qquad (٦)$$

المعادلتان (٥) ، (٦) لا تعطيان فقط صيغا لإيجاد $f'(z_0)$ بدلالة المشتقات الجزئية للمركبتين v,u ؛ بل إنهما تمداننا فى نفس الوقت بشروط لازمة لوجود $f'(z_0)$. بمساواة الأجزاء الحقيقية فى أحد التعبيرين بنظائرها فى التعبير الآخر وبمساواة الأجزاء التخيلية فى أحد التعبرين بنظائرها فى التعبير الآخر ، نجد أن وجود $f'(z_0)$ يتطلب

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \qquad \text{و} \qquad u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0). \qquad (٧)$$

المعادلتان (٧) يطلق عليهما **معادلتا كوشى –ريمان** **Cauchy-Riemann equations**.
واطلقت هذه التسمية على شرف كل من الرياضى الفرنسى أ.ل كوشى **A.L. Cauchy** (١٧٨٩ – ١٨٥٧) الذى اكتشف واستخدم هذه المعادلات ، والرياضى الألمانى ج.ف.ب. ريمان **G.F.B.Riemann** (١٨٢٦ – ١٨٦٦) الذى بين لهما وضعا أساسياً فى تطوير وتنمية نظرية دوال المتغير المركب.

فيما يلى نلخص النتائج السابقة

نظرية : نفرض أن الدالة $f(z)=u(x,y) + iv(x,y)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة z_0 . إذن المشتقات الجزئية الأولى بالنسبة للمتغيرين y,x للدالتين v,u لها وجود عند (x_0,y_0) وهى تحقق معادلتى كوشى – ريمان (٧) عند هذه النقطة ؛ كما أن المشتقة $f'(z_0)$ يمكن الحصول عليها بدلالة هذه المشتقات وذلك باستخدام أى من المعادلتين (٥) أو (٦) .

لتوضيح النظرية اعتبر الدالة

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

بينا فى بند (١٤) أن هذه الدالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة ؛ فى الواقع $f'(z) = 2z$ وعليه فإن معادلتى كوشى – ريمان متحققتان عند كل نقطة . ولتحقيق ذلك نلاحظ أن $u(x,y) = x^2 - y^2$ و $v(x,y) = 2xy$. إذن

$$u_x(x,y) = 2x = v_y(x,y), \qquad u_y(x,y) = -2y = -v_x(x,y).$$

وكذلك إذا استخدمنا أيا من المعادلتين (٥) أو (٦) نحصل على

$$f'(z) = 2x + i2y = 2z.$$

حيث إن معادلتى كوشى – ريمان لازمتان للتأكد من وجود $f'(z_0)$ فهما كثيرا ما تستخدمان لتعيين نقاط تكون عندها دالة معطاة غير قابلة للاشتقاق . اعتبر على سبيل المثال الدالة $f(z) = |z|^2$ والتى نوقشت فى بند (١٤) . فى هذه الحالة $v(x,y) = 0$ ، $u(x,y) = x^2 + y^2$ وبالتالى فإن $u_x(x,y) = 2x$ ، $v_y(x,y) = 0$ بينما $u_y(x,y) = 2y$ ، $v_x(x,y) = 0$. لاحظ أن معادلتى كوشى – ريمان غير متحققتين فى هذا المثال وذلك فيما عدا الحالة التى يكون فيها $x = y = 0$. من ذلك نجد أن مشتقة الدالة قيد البحث لا يكون لها وجود عند $z \neq 0$. ويجب أن يراعى القارىء هنا أن النظرية السابقة لا تضمن لنا وجود $f'(0)$؛ وعلى أية حال فالنظرية المعطاة فى البند التالى تعالج هذه النقطة .

١٧ – الشروط الكافية Sufficient Conditions

إن صحة معادلتى كوشى – ريمان عند نقطة ما $z_0 = (x_0, y_0)$ ليس كافيا (أى لا يستلزم بالضرورة) للتثبت من وجود مشتقة f عند هذه النقطة (انظر تمرين (٦) بند (١٨)) . إلا أننا مع ذلك يمكننا التحقق من وجود مشتقة لدالة ما إذا تحققت شروط اتصال خاصة وذلك على ضوء النظرية التالية

نظرية : لتكن الدالة

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

معرفة عند كل نقطة من نقاط جوار ما ε لنقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ ؛ ولنفرض أن المشتقات الجزئية الأولى للدالتين v,u بالنسبة للمتغيرين y,x لها وجود فى هذا الجوار ومتصلة عند (x_0, y_0) . إذا حققت هذه المشتقات الجزئية الأولى معادلتى كوشى – ريمان عند (x_0, y_0) ، فإن المشتقة $f'(z_0)$ يكون لها وجود

للبرهان نكتب ابتداء $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$، حيث $0 < |\Delta z| < \varepsilon$ ، ونكتب $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$.
واضح إذن أن

$$\Delta w = \Delta u + i\,\Delta v$$

حيث

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0,y_0),$$
$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0,y_0). \qquad (١)$$

لكن على ضوء اتصال المشتقات الجزئية الأولى للدالتين v,u عند النقطة (x_0,y_0) يكون

$$\Delta u = u_x(x_0,y_0)\,\Delta x + u_y(x_0,y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$
$$\Delta v = v_x(x_0,y_0)\,\Delta x + v_y(x_0,y_0)\,\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \qquad (٢)$$

حيث ε_1 , ε_2 تؤولان إلى الصفر عندما تقترب $(\Delta x,\Delta y)$ من $(0,0)$. وعليه

$$\Delta w = u_x(x_0,y_0)\,\Delta x + u_y(x_0,y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \qquad (٣)$$
$$+ i[v_x(x_0,y_0)\,\Delta x + v_y(x_0,y_0)\,\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}].$$

استخدام التفاضلات فى حساب التفاضل للدوال الحقيقية فى متغيرين حقيقيين يمكننا من برهان وجود التعبيرين (٢) بالنسبة لدالتين حقيقيتين لهما مشتقات جزئية أولى متصلة[١].

حيث إن معادلتى كوشى – ريمان متحققتان عند (x_0,y_0) ، فإنه يمكننا استبدال $u_y(x_0,y_0)$ بالمقدار $-v_x(x_0,y_0)$ و $v_y(x_0,y_0)$ بالمقدار $u_x(x_0,y_0)$ فى المعادلة (٣) ، و القسمة على Δz لنحصل على

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\,\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta z} \qquad (٤)$$

لكن $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = |\Delta z|$ وعليه $\left|\dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta z}\right| = 1.$

وهذا يعنى أن الحد الأخير فى التعبير عن $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ فى (٤) يؤول إلى الصفر عندما يؤول Δz إلى الصفر . وعليه فإن نهاية الطرف الأيسر للمعادلة (٤) لها وجود ويكون

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0).$$

لتوضيح النظرية اعتبر الدالة

$$f(z) = e^x e^{iy}$$

حيث $u(x,y) = e^x \cos y$ ، $v(x,y) = e^x \sin y$. يمكن أن نرى بسهولة أن شروط النظرية متحققة عند كل نقطة من نقاط المستوى المركب . وعليه تكون المشتقة $f'(z)$ موجودة عند كل نقطة ويكون

---

(١) انظر على سبيل المثال كتاب "Advanced Calculus" تأليف W.R. Mann و A.E. Taylor الطبعة الثانية ، ص ١٦١ – ١٦٢ ، ص ٢١٣ - ٢١٤ ، ١٩٧٢ .

$$f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x e^{iy}.$$

لاحظ أن $f'(z) = f(z)$.

وكتوضيح آخر ، نرى مباشرة من النظرية أن الدالة $f(z) = |z|^2$ لها مشتقة عند $z = 0$ ، وفى الحقيقة فإن $f'(0) = 0 + i0 = 0$.وقد رأينا فى البندين (١٤) ، (١٦) أن هذه الدالة لا يوجد لها مشتقة عند أى نقطة أخرى من المستوى المركب .

١٨ – معادلتا كوشى – ريمان فى الصورة القطبية

The Cauchy-Riemann Equations in Polar Form

نعرض النتائج الأساسية للبندين السابقين فى إطار الاحداثيات القطبية ، وذلك عندما $z_0 \neq 0$ ، باستخدام التحويلات الأحداثية

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta. \tag{١}$$

نفرض أن $w = f(z)$.الأجزاء الحقيقية والتخيلية للعدد المركب $w = u + iv$ سيعبر عنها بدلالة المتغيرين x,y أو المتغيرين r,θ وذلك وفقاً على أى التعبيرين $z = x + iy$ أو $z = re^{i\theta}$ للنقطة z نعتمد . باستخدام قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقات الدوال الحقيقية فى متغيرين حقيقيين ، فإننا نتبين أن المشتقات الجزئية الأولى للدالتين u,v بالنسبة للمتغيرين x,y تكون دوالاً متصلة فى (x,y) عند أى نقطة مغايرة للصفر إذا كانت المشتقات الجزئية الأولى لهما بالنسبة للمتغيرين r , θ دوال متصلة فى (r,θ) عند نفس النقطة ، وبالعكس . بالإضافة إلى ذلك ، فإن معادلتى كوشى – ريمان ، (٧) بند (١٦) ، تأخذان الصورة

$$u_r(r_0,\theta_0) = \frac{1}{r_0} v_\theta(r_0,\theta_0), \qquad \frac{1}{r_0} u_\theta(r_0,\theta_0) = -v_r(r_0,\theta_0) \tag{٢}$$

بدلالة الاحداثيات القطبية ؛ وإذا كانت f قابلة للاشتقاق عند (r_0,θ_0) فإن

$$= \frac{1}{r_0} e^{-i\theta_0}[v_\theta(r_0,\theta_0) - iu_\theta(r_0,\theta_0)]. \tag{٣}$$

برهان هذ الحقائق يشكل محتوى التمارين (٧) ، (٨) ، (٩) ، من هذا البند .

نذكر الآن نص الصيغة البديلة لنظرية بند (١٧) وذلك عندما $z_0 \neq 0$.

نظرية : التكن الدالة $f'(z_0) = e^{-i\theta_0}[u_r(r_0,\theta_0) + iv_r(r_0,\theta_0)]$

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

معرفة لجميع نقط جوار ما ε للنقطة الغير صفرية $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ ، ولنفرض أن المشتقات الجزئية الأولى للدالتين u,v بالنسبة للمتغيرين r , θ لها وجود فى هذا الجوار وبأنها دوال فى (r,θ) متصلة عند (r_0,θ_0) . إذا حققت هذه المشتقات الجزئية معادلتى

كوشى – ريمان فى الصورة القطبية عند (r_0,θ_0) ، فإن المشتقة $f'(z_0)$ يكون لها وجود .

لتوضيح هذه النتائج اعتبر الدالة

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}}.$$

لاحظ أن $u(r,\theta) = \cos\theta/r$ و $v(r,\theta) = -\sin\theta/r$. ولاحظ أيضاً أن شروط النظرية هى بالفعل متحققة عند أى نقطة غير صفرية $z = re^{i\theta}$ من نقاط المستوى المركب . وعليه تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند أى من هذه النقاط غير الصفرية . وباستخدام الصيغة (٣) نجد أن

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(-\frac{\cos\theta}{r^2} + i\frac{\sin\theta}{r^2}\right) = -\frac{1}{(re^{i\theta})^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

تمـــارين

١ - استخدم نظرية بند (١٦) لإثبات أن $f'(z)$ ليس لها وجود عند أى نقطة وذلك إذا كانت $f(z)$ هى

(أ) $\bar{z}$ ؛ (ب) $z - \bar{z}$ ؛ (جـ) $e^x e^{-iy}$ ؛ (د) $2x + ixy^2$

٢ - استخدم نظرية بند ١٧ والصيغة (٥) من نفس البند لتبين أن كلا من $f'(z)$ و $f''(z)$ لها وجود عند كل نقطة من نقاط المستوى المركب ، ثم أوجد كلا من $f'(z)$ ، $f''(z)$ ، وذلك لكل من الحالات التالية :

(أ) $f(z) = iz + 2$ ؛ (ب) $f(z) = e^{-x}e^{-iy}$ ؛ (جـ) $f(z) = z^3$ ؛
(د) $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

الأجوبة (ب) $f'(z) = -f(z),\ f''(z) = f(z)$ ؛ (د) $f''(z) = -f(z)$

٣ - باستخدام نتائج البندين ١٦ ، ١٧ بين فى كل من الحالات الآتية متى تكون $f'(z)$ لها وجود ، ثم احسب قيمتها

(أ) $f(z) = 1/z$ ؛ (ب) $f(z) = x^2 + iy^2$ ؛ (جـ) $f(z) = z\,\text{Im}\,z.$

الأجوبة (أ) $f'(z) = -1/z^2$ حيث $z \neq 0$
$f'(x+ix) = 2x$ ؛ (جـ) $f'(0) = 0$

٤ - استخدم نظرية بند (١٨) لاثبات أن الدالة $g(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ حيث $(r > 0$ و $-\pi < \theta < \pi)$ قابلة للاشتقاق عند أى نقطة من نقط نطاق تعريفها وبأن $g'(z) = 1/[2g(z)]$.

٥ - إذا كانت $f(z) = x^3 - i(y-1)^3$ فإن $u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 3x^2$.
علل لماذا تكون $f'(z) = 3x^2$ عند نقطة وحيدة هى $z = i$ ؟

٦ - اثبت أن الدالة

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\bar{z})^2}{z} & (z \neq 0), \\ 0 & (z = 0), \end{cases}$$

غير قابلة للاشتقاق عند $z=0$ رغم تحقيقها لمعادلتي كوشي – ريمان عند هذه النقطة .

اقتراح : استخدم تعريف (١) من بند (١٤) للمشتقة ثم اجعل z تقترب من الصفر خلال مسارين مختلفين أحدهما أحد المحورين والآخر الخط المستقيم $y=x$.

٧ – استخدم التحويل الاحداثي (١) ، من بند (١٨) ، أو معكوسه وكذلك قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقات الدوال الحقيقية لمتغيرين حقيقيين للحصول على الصيغ

$$u_x = u_r \cos\theta - \frac{1}{r} u_\theta \sin\theta,$$
$$u_y = u_r \sin\theta + \frac{1}{r} u_\theta \cos\theta$$

وكذلك على صور مماثلة لكل من v_y, v_x . استنتج أن المشتقات الجزئية الأولى للدالتين v, u بالنسبة للمتغيرين y, x تكون دوال متصلة فى (x,y) عند أى نقطة غير صفرية إذا وفقط إذا كانت المشتقات الجزئية الأولى للدالتين v, u بالنسبة للمتغيرين r , θ دوال متصلة فى (r,θ) عند نفس النقطة .

٨ استخدم نتائج تمرين (٧) للحصول على الصورة القطبية (٢) ، من بند (١٨) ، لمعادلتي كوشي ريمان ، (٧) بند (١٦)

اقتراح : حول المعادلات $u_x = v_y, u_y = -v_x$ إلى

$$\left(u_r - \frac{1}{r} v_\theta\right) \cos\theta = \left(\frac{1}{r} u_\theta + v_r\right) \sin\theta,$$
$$\left(u_r - \frac{1}{r} v_\theta\right) \sin\theta = -\left(\frac{1}{r} u_\theta + v_r\right) \cos\theta.$$

٩ استخدم نتائج تمريني (٧) و (٨) وكذلك الصيغتين (٥)و (٦) من بند (١٦) للحصول على الصورة القطبية (٣) بند (١٨) لمشتقة $f(z)$ عند z_0 .

١٩ الدوال التحليلية Analytic Functions

يمكننا الآن تقديم مفهوم **الدالة التحليلية Analytic function**. يقال لدالة f لمتغير مركب z أنها تحليلية عند النقطة z_0 إذا كانت مشتقتها موجودة ليس فقط عند النقطة z_0 ، بل عند جميع نقط جوار ما للنقطة z_0 . ويقال أن f تحليلية فى منطقة R إذا كانت تحليلية عند كل نقطة من نقاط R.(*)

الدالة $f(z) = |z|^2$ مثلا دالة غير تحليلية عند أى نقطة ، وذلك لأنها قابلة للاشتقاق عند نقطة واحدة فقط وهى $z=0$ (انظر بند (١٤)) .

إذا كانت f دالة تحليلية فى منطقة R ، فإنه يوجد حول كل نقطة z من R جوار يقع فى نطاق تعريف f . وهذا يعنى أن z لابد وأن تكون نقطة داخلية لنطاق تعريف الدالة ، وعليه فإن الدوال التحليلية تكون معرفة دائماً على نطاقات (ارجع لبند (٧) لمعرفة

* نشير إلى أن لفظ **holomorphic** يستخدم فى بعض المراجع كبديل للفظ **analytic** ، وعليه فإن لفظ تحليلى لدينا سيعنى أيا من اللفظين المترادفين .

الفرق بين هذه التعريفات) . وعلى أية حال ، فإذا ذكرنا على سبيل المثال أن f دالة تحليلية على القرص المغلق $|z| \leqq 1$ ، فسيكون مفهوما ضمنيا أن f دالة تحليلية على نطاق يحتوى هذا القرص .

يقال لدالة أنها **شاملة** Entire إذا كانت هذه الدالة تحليلية عند كل نقطة من نقط المستوى . وحيث أن مشتقة كثيرة الحدود لها وجود عند أى نقطة ، نستنتج أن أى **كثيرة حدود تكون دالة شاملة**

إذا كانت دالة ما ليست تحليلية عند نقطة z_0 وكانت فى نفس الوقت تحليلية عند نقطة ما من نقاط أى جوار يحتوى z_0 ، فإننا نسمى z_0 **نقطة شاذة** Singular point للدالة (أو **نقطة شذوذ** Singularity للدالة) . لاحظ مثلا ، أنه إذا كان $f(z) = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$ فإن $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ وعليه فإن f تحليلية تكون عند كل نقطة فيما عدا عند $z = 0$ حيث الدالة غير معرفة أصلاً . من هذا يتضح أن $z = 0$ نقطة شاذة لتلك الدالة . ومن ناحية أخرى، الدالة $f(z) = |z|^2$ ليس لها نقط شاذة ، وذلك لأنها ليست تحليلية عند أى نقطة .

شرط ضرورى – وليس بأى سبيل كاف حتى تكون دالة ما f تحليلية فى نطاق D هو بطبيعة الحال اتصال f على D بأكمله . كما أن وجوب تحقيق معادلتى كوشى – ريمان هو أيضاً شرط ضرورى ، إلا أنه ليس بكاف . والنظريتان فى بند (١٧) وبند (١٨) تمداننا بشروط كافية حتى تكون الدالة تحليلية على D.

صيغ الاشتقاق الواردة فى بند (١٥) تمكننا من الحصول على شروط كافية مفيدة أخرى حتى تكون دالة ما دالة تحليلية . وحيث إن مشتقة حاصل جمع أو حاصل ضرب دالتين له وجود طالما كانت كل من الدالتين قابلة للاشتقاق ، فإننا نستنتج أن حاصل **جمع أو حاصل ضرب دالتين كل منهما تحليلية فى D هو دالة تحليلية فى D** . وبالمثل **حاصل قسمة هاتين الدالتين هو دالة تحليلية فى D بشرط أن الدالة فى مقام القسمة لا تأخذ القيمة صفر عند أى نقطة من نقاط D . وعلى وجه التخصيص فإن حاصل** القسمة $P(z)/Q(z)$ لكثيرتى حدود ، يكون دالة تحليلية فى أى نطاق لا تنعدم فيه $Q(z)$ عند أى نقطة من نقاطه .

من قاعدة السلسلة لمشتقة تحصيل دالتين (بند (١٥)) نجد أن **تحصيل دالتين تحليليتين هو دالة تحليلية** . وحتى نكون أكثر تحديداً ، إفرض أن $f(z)$ تحليلية فى D وأن $g(z)$ تحليلية فى نطاق يحتوى مدى f . من هذا نجد أن الدالة المحصلة $g[f(z)]$ تكون دالة تحليلية فى D .

لتوضيح ذلك اعتبر الدالة الشاملة $f(z)=z^2$. وفقا لتمرين (٤) بند (١٨) ، تكون الدالة

$$g(z) = \sqrt{r}\,e^{i\theta/2} \qquad (r > 0,\ -\pi < \theta < \pi) \qquad (١)$$

تحليلية عند كل نقطة من نقاط نطاق التعريف المبين والذى يتكون من جميع نقط المستوى فيما عدا نقطة الأصل أو أى نقطة على الجزء السالب من المحور الحقيقى وحتى يمكن تكوين الدالة المحصلة $g[f(z)]$ ، فإننا نكتفى الآن بنطاق تعريف D للدالة f بحيث يكون مدى f وفقا لهذا التحديد – محتوى فى نطاق تعريف g . أكبر نطاق تعريف ممكن D له هذه الخاصية هو $r > 0,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2$ ، أى النصف الأيمن للمستوى مع استبعاد جميع نقط المحورالتخيلى . ويمكن برهنة ذلك بسهولة إذا اعتبرنا الصورة القطبية

$$f(z) = r^2 e^{i2\theta} \qquad (٢)$$

مع ملاحظة أن $-\pi < 2\theta < \pi$ عندما $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. من ذلك نرى أن الدالة $g[f(z)]$ تكون تحليلية عند أى نقطة z بحيث $\operatorname{Re} z > 0$. وبطبيعة الحال نجد من (١) ، (٢) أن $g[f(z)] = z$ عند مثل هذه النقطة .

٢٠ – الدوال التوافقية Harmonic Functions

يقال لدالة حقيقية – أى ذات قيم حقيقية – h فى متغيرين حقيقيين x،y أنها دالة **توافقية** **Harmonic** فى نطاق معطى من المستوى xy إذا كان لهذه الدالة مشتقات جزئية متصلة أولى وثانية ومحققة **لمعادلة لابلاس** **Laplace's equation** التفاضلية الجزئية الآتية :

$$h_{xx}(x,y) + h_{yy}(x,y) = 0 \qquad (١)$$

وذلك عند كل نقطة من نقاط النطاق . سنبرهن الآن أن المركبتين u،v لدالة تحليلية $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ فى نطاق D ، هما دالتان توافقيتان فى هذا النطاق . وبرهان ذلك يقتضى معرفة نتيجة سنقوم ببرهانها فيما بعد وذلك فى بند (٥٢) من الباب الخامس . وتنص هذه النتيجة على أنه إذا كانت دالة متغير مركب دالة تحليلية عند نقطة ما ، فإن كلا من الجزئين الحقيقى والتخيلى لهذه الدالة له مشتقات جزئية متصلة لأى رتبة عند هذه النقطة .

حيث أن f تحليلية فى نطاق ما D ، فإن المشتقات الجزئية الأولى لمركباتها تحقق معادلتى كوشى – ريمان عند كل نقطة من نقاط D ، أى أن

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x. \qquad (٢)$$

وبأخذ مشتقات الدوال فى (٢) بالنسبة للمتغيرx نحصل على

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad \text{و} \quad u_{yx} = -v_{xx}. \qquad (٣)$$

وبالمثل ، فإن أخذ المشتقات بالنسبة للمتغير y يعطى

$$u_{xy} = v_{yy}, \quad \text{و} \quad u_{yy} = -v_{xy}. \qquad (٤)$$

والآن فإن اتصال المشتقات الجزئية المعنية يسمح لنا باستخدام نظرية فى حساب التفاضل للمتغيرات الحقيقية[1] ، وعليه فإن $u_{yx} = u_{xy}$ ، $v_{yx} = v_{xy}$ ؛ ومن ثم فإننا نحصل من معادلتى (٣) و (٤) على

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \quad \text{و} \quad v_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y) = 0.$$

مما سبق نجد أن إذا كانت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحليلية فى نطاق D ، فإن مركبتيها v,u تكون دالتين توافقيتين فى النطاق D .

إذا كانت v,u دالتين توافقيتين فى نطاق ما D وكانت مشتقاتهما الجزئية الأولى محققة لمعادلتى كوشى — ريمان فى النطاق D ، فإننا نقول إن v مرافق توافقى Harmonic conjugater للدالة u .

من الواضح إذن أنه إذا كانت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة تحليلية فى نطاق ما D ، فإن v تكون مرافقا توافقيًا للدالة u،وعكس ذلك صحيح بمعنى إنه إذا كانت v مرافقا توافقيا للدالة u فى نطاق ما D ، فإن الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تكون تحليلية فى D ، وهذا فى الواقع ينتج مباشرة من النظرية الواردة فى بند (١٧) . وعليه فإن **الشرط الكافى واللازم حتى تكون $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة تحليلية فى نطاق D هو أن تكون v مرافقا توافقيا للدالة u فى النطاق D**

يجب أن نلاحظ جيدا أنه إذا كانت v مرافقا توافقيا للدالة u فى نطاق ما فليس معنى ذلك على — وجه العموم — أن تكون u مرافقا توافقيا للدالة v فى نفس النطاق.ولتوضيح ذلك ، اعتبر الدوال

$$v(x,y) = 2xy \quad \text{و} \quad u(x,y) = x^2 - y^2$$

حيث أن هاتين الدالتين هما الجزءان الحقيقى والتخيلى ، على التعاقب ، للدالة الشاملة $f(z) = z^2$ ، فإن v تكون مرافقا توافقيا للدالةu فى المستوى بأكمله . ومع ذلك فإن u لا يمكن أن تكون مرافقا توافقيا للدالة v ، وذلك لأنه على ضوء النظرية الواردة فى بند (١٦) فإن الدالة $2xy + i(x^2 - y^2)$ ليست تحليلية عند أى نقطة . ونترك كتمرين برهان أنه إذا كانت الدالتان v,u كل منهما مرافق توافقى للآخر ، فإن كلا منهما تكون دالة ثابتة (تمرين(٨)من هذا البند) .

---

(١) انظر على سبيل المثال كتاب "Advanced Calculus" تأليف A.E. Taylor, W.R. Mann طبعة ثانية ، ص ٢١٤ — ٢١٦ ، ١٩٧٢ .

وعلى أية حال ، فإنه إذا كانت v مرافقا توافقيا للدالة u فى نطاق D ، فإن u – تكون مرافقا توافقيا للدالة v فى النطاق D والعكس. وذلك لأن الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تكون دالة تحليلية فى D إذا وفقط إذا كانت $-if(z) = v(x,y) - iu(x,y)$ دالة تحليلية فى D .

سنبرهن فيما بعد وذلك فى بند (٧٨) من الباب الثامن أنه إذا كانت u دالة توافقية فى نطاق من نوع خاص (على وجه التحديد نطاق بسيط الترابط) ، فإن u يكون لهادائماً مرافق توافقى . وعليه فإن أى دالة توافقية فى مثل هذا النطاق تمثل الجزء الحقيقى لدالة تحليلية ونضيف أنه إذا كانت u,v مرافقين توافقيين للدالة u فإن u,v يكون دالة ثابتة (تمرين (١٠) من هذا البند) .

نوضح الآن طريقة للحصول على مرافق توافقى لدالة توافقية معطاة . واضح أن الدالة

$$u(x,y) = y^3 - 3x^2y \tag{٥}$$

دالة توافقية فى المستوى xy بأكمله . وحتى نحصل على مرافق توافقى $v(x,y)$ لهذه الدالة نلاحظ أن

$$u_x(x,y) = -6xy.$$

وعلى ضوء الشرط $u_x = v_y$ ، فإنه يمكننا أن نخلص إلى

$$v_y(x,y) = -6xy.$$

بإجراء تكامل الطرفين بالنسبة للمتغير y مع اعتبار x ثابتة ، نجد أن

$$v(x,y) = -3xy^2 + \phi(x) \tag{٦}$$

حيث ϕ دالة اختيارية فى x . ومن تحقق الشرط $u_y = -v_x$ فإن المعادلتين (٥) ، (٦) تعطيان

$$3y^2 - 3x^2 = 3y^2 - \phi'(x).$$

وعليه فإن $\phi'(x) = 3x^2$ ، أى أن $\phi(x) = x^3 + c$ حيث c ثابت حقيقى اختيارى . ومن هنا نرى أن الدالة

$$v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + c$$

مرافق توافقى للدالة $u(x,y)$. وتكون الدالة التحليلية المناظرة هى

$$f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2 + c). \tag{٧}$$

ويمكن التحقق بسهولة من أن

$$f(z) = i(z^3 + c).$$

وهذه الصورة مستوحاة من الحالة التى يكون فيها $y = 0$، حيث تؤول المعادلة (٧) إلى

$$f(x) = i(x^3 + c).$$

تمارين

١ – برهن أن كلا من الدوال الآتية دالة شاملة

(أ) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$ ؛ (ب) $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ ؛

(جـ) $f(z) = e^{-y}e^{ix}$ ؛ (د) $f(z) = (z^2 - 2)e^{-x}e^{-iy}$

٢ – برهن أن كلا من الدوال الآتية ليست تحليلية عند أى نقطة

(أ) $f(z) = xy + iy$ ؛ (ب) $f(z) = e^{y}e^{ix}$

٣ – اوجد النقاط الشاذة لكل من الدوال الآتية ، واذكر فى كل حالة لماذا تكون هذه النقاط هى النقاط الوحيدة التى تكون عندها الدالة غير تحليلية ؟

(أ) $\dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$ ؛ (ب) $\dfrac{z^3+i}{z^2-3z+2}$ ؛ (جـ) $(z+2)^{-1}(z^2+2z+2)^{-1}$

الأجوبة : (أ) $z = 0, \pm i$ ؛ (جـ) $z = -2, -1 \pm i$

٤ – برهن أن الدالة $g(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$ حيث $r > 0$ و $0 < \theta < \pi$ دالة تحليلية فى نطاق المشار إليه ، ومن ثم برهن أن الدالة المحصلة $g(z^2 + 1)$ تكون تحليلية فى ربع المستوى $x > 0, y > 0$.

٥ – اثبت أن الدالة $g(z) = \text{Log} r + i\theta$ حيث $r > 0$ و $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ – وعلما بأن اللوغاريتم المستخدم هو اللوغاريتم الطبيعى ، تكون تحليلية فى نطاق التعريف المبين . واثبت أن $g'(z) = 1/z$ فى هذا النطاق ؛ ومن ثم بين أن المحصلة $g(2z - 2 + i)$ تكون تحليلية فى النطاق $x > 1$

٦ اذكر لماذا يكون تحصيل دالتين شاملتين دالة شاملة ؟ واذكر أيضا لماذا يكون أى ارتباط خطى Linear combination $cf(z) + dg(z)$ لدالتين شاملتين ، حيث d,c ثوابت مركبة ، هو بالتالى دالة شاملة ؟

٧ – فى كل من الحالات الآتية بين أن u دالة توافقية فى نطاق ما ، ثم اوجد فى كل حالة مرافقا توافقيا v للدالة u .

(أ) $u(x,y) = 2x(1 - y)$ ؛ (ب) $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ ؛

(جـ) $u(x,y) = \sinh x \sin y$ ؛ (د) $u(x,y) = y/(x^2 + y^2)$

الأجوبة : (أ) $v(x,y) = x^2 - y^2 + 2y$ ؛ (جـ) $v(x,y) = -\cosh x \cos y.$

٨ – اثبت أنه إذا كانت كل من v,u مرافقا توافقيا للآخر فى نطاق ما ، فإن كلا منهما لابد وأن تكون دالة ثابتة .

٩ – لتكن f تكون دالة تحليلية فى نطاق ما D . برهن أن f تكون دالة ثابتة إذا كان

(أ) $\overline{f(z)}$ هى أيضاً دالة تحليلية فى D ،

(ب) $|f(z)|$ دالة ثابتة لجميع z فى D ؛

(جـ) f دالة ذات قيم حقيقية لجميع z فى D .

١٠ – بين أن الفرق بين أى دالتين كل منهما مرافق توافقى لدالة معطاة فى نطاق ما هو مقدار ثابت .

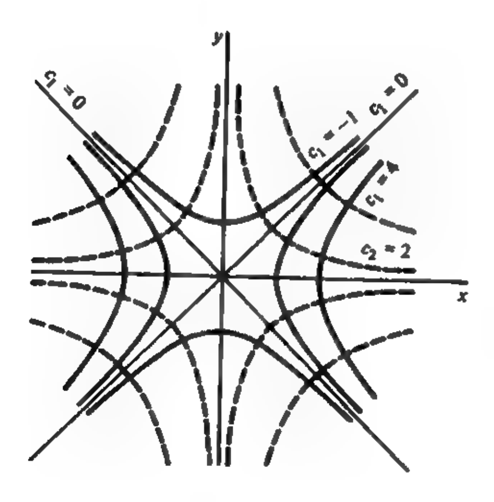
١١ – لتكن $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ دالة تحليلية فى نطاق D لا يحوى النقطة $z = o$. باستخدام معادلتى كوشى – ريمان فى الصورة القطبية (بند (١٨)) ، اثبت أن الدالة u تحقق الصورة القطبية

$$r^2 u_{rr}(r,\theta) + r u_r(r,\theta) + u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0$$

لمعادلة لابلاس لجميع نقاط D . وبين أن الدالة v تحقق أيضاً الصورة القطبية لمعادلة لابلاس على D .

١٢ – اثبت أن الدالة $u(r,\theta) = \mathrm{Log}\, r$ تكون توافقية فى النطاق $r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi$. (انظر تمرين (١١)) ، ثم اوجد مرافقا توافقيا لها .

١٣ – لتكن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة تحليلية فى نطاق ما D واعتبر عائلات المنحنيات المستوية $u(x,y) = c_1,\ v(x,y) = c_2$ حيث c_2, c_1 ثوابت اختيارية . برهن أن هذه العائلات متعامدة . وبشكل أكثر تحديدا ، اثبت أنه إذا كانت $z_0 = (x_0, y_0)$ نقطة مشتركة لمنحنيين معينين $u(x,y) = c_1,\ v(x,y) = c_2$ وكان $f'(z_0) \neq 0.$ ، فإن المماسين لهذين المنحنيين عند النقطة (x_0, y_0) يكونان متعامدين .



(شكل ١٧)

١٤ - اثبت أن عائلات المنحنيات المستوية $v(x,y) = c_2,\ u(x,y) = c_1$ لمركبتى الدالة $f(z) = z^2$ هى المنحنيات المبينة فى شكل (١٧) . لاحظ أن تمرين ١٣ يبين تعامد هاتين العائلتين . المنحنيان $v(x,y) = o,\ u(x,y) = o$ يتقاطعان فى نقطة الأصل وهما مع ذلك ليسا متعامدين ؛ بين لماذا تكون هذه الحقيقة متفقة مع النتيجة المعطاة بتمرين (١٣) .

١٥ - ارسم مخططا بيانيا لعائلتى المنحنيات المستوية للمركبتين v,u للدالة $f(z) = 1/z$ ولاحظ خاصية التعامد المشار إليها فى تمرين (١٣) .

١٦ - حل تمرين (١٥) مستخدما الاحداثيات القطبية .

١٧ - ارسم مخططا بيانيا لعائلتى المنحنيات المستوية للمركبتين v,u للدالة $f(z) = (z-1)/(z+1)$ وبين كيف يمكن توضيح نتائج تمرين (١٣) فى هذه الحالة .

الفصل الثالث

دوال بسيطة Elementary Functions

فى هذا الباب سنستعرض عددا من الدوال البسيطة التى سبق للقارىء دراستها كدوال للمتغير الحقيقى وسنقوم بتعريف الدوال المناظرة للمتغير المركب . ولكى نكون أكثر تحديداً ، فإننا سنقوم بتعريف دوال تحليلية لمتغير مركب z بحيث تؤول هذه الدوال للدوال البسيطة المناظرة المألوفة للمتغير الحقيقى عندما تكون z=x+io . وسنقوم أولا بتعريف الدالة الأسية للمتغير المركب ثم نستخدمها بعد ذلك لتعريف دوال أخرى .

٢١ - الدالة الأسية The Exponential Function

إذا كان المطلوب تعريف دالة f للمتغير المركب z=x+iy بحيث تؤول هذه الدالة إلى الدالة الأسية المألوفة للمتغير الحقيقى عندما يكون z عددا حقيقيا ، فإن هذه الدالة لابد وأن تحقق العلاقة

$$f(x + i0) = e^x \qquad (١)$$

لكل عدد حقيقى x . حيث أنه من المعلوم أن

$$d(e^x)/dx = e^x$$

لكل عدد حقيقى x ، فمن الطبيعى أن نتطلب أن تحقق الدالة f الشروط التالية :

(٢) f تكون دالة شاملة (أى أنها تحليلية لجميع نقط المستوى المركب) لكل عدد مركب z يكون $f'(z) = f(z)$

الدالة f المعرفة بالمعادلة

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y \qquad (٣)$$

لكل عدد مركب z=x+iy تحقق الشروط (١) ، (٢) . ويجب ملاحظة أنه عند حساب siny, cosy فمن المتفق عليه أن تكون y مقيسة بالتقدير الدائرى . من الممكن تبيان (تمرين (١٤) من بند (٢٢)) أن الدالة f ، المعرفة كما فى (٣) ، هى الدالة الوحيدة

التى تحقق الشروط (١) ، (٢) ، وبالتالى فإننا نكتب

$$f(z) = e^z.$$

بذلك تكون الدالة الأسية للمتغير المركب z معرفة لكل عدد مركب z كالتالى

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y). \qquad (٤)$$

وكما ذكرنا آنفا فإن هذه الدالة تؤول إلى الدالة الأسية المألوفة للمتغير الحقيقى وذلك عندما تكون y=o ، وهى كذلك دالة شاملة ، وتحقق الصيغة الاشتقاقية

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z \qquad (٥)$$

لكل عدد مركب z .

ويجب ملاحظة أنه عندما يكون z هو العدد التخيلى $i\theta$ فإن المعادلة (٤) تصبح

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

وهذه هى صيغة أويلر السابق ذكرها فى بند (٥) . من هذا يتضح أن تعريف الرمز $e^{i\theta}$ المذكور آنفا فى بند (٥) يكون متسقا مع التعريف (٤) من هذا البند .

فيما يلى سنتفق على أنه عندما تكون $z = 1/n$ ، فإن قيمة e^z هى الجذر النونى الموجب للمقدار e المعطى بالمعادلة (٤) ، أى أن $e^{1/n}$ هى $\sqrt[n]{e}$. وهذا تمايز عن الاتفاق (بند (٦)) الذى يتطلب منا عادة أن نفسر $e^{1/n}$ على أنه أحد الجذور النونية للمقدار e .

أخيراً ، يجدر بنا الإشارة إلى أن – وهذا من قبيل التسهيل فقط – expz قد تكتب أحياناً للدلالة على e^z .

٢٢ – خواص أخرى للدالة الأسية

التعريف

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad (١)$$

للعدد المركب e^z يعطينا مباشرة الصيغة القطبية له كالتالى :

$$e^z = \rho(\cos\phi + i \sin\phi) \qquad (٢)$$

حيث $\rho = e^x, \phi = y$. من هذا ينتج مباشرة أن مقياس العدد e^z هو e^x ، كما أن y تمثل سعة له ، أى أن :

$$|e^z| = e^x \qquad , \qquad \arg e^z = y. \qquad (٣)$$

بإستخدام التحويلة $w = e^z$ ، فإننا نجد من تعريف (١) أن أى نقطة غير صفرية

$$w = \rho(\cos\phi + i \sin\phi) \qquad (٤)$$

تكون صورة العدد

$$z = \text{Log}\,\rho + i\phi \qquad (٥)$$

حيث Log هو اللوغاريتم الطبيعى (أى بالنسبة للأساس e) . ولتوضيح ذلك ، دعنا نبحث عن العدد المركب z الذى يحقق المعادلة $e^z = -1$. حيث أن (٤) هى الصيغة القطبية للعدد -1 عندما $\rho = 1$ $\phi = \pi + 2n\pi\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ، فإنه ينتج من (٥) أن أى عدد مركب $z = (1 + 2n)\pi i$ يكون حلا للمعادلة $e^z = -1$.

حيث أن $|e^z| = e^x$ و $e^x > 0$ لكل عدد حقيقى x، فإنه ينتج أن $|e^z| > 0$ لكل عدد مركب z. إذن

$$e^z \neq 0 \quad \text{لكل عدد مركب z .} \qquad (٦)$$

وهذا يعنى أن النقطة w=o لا يمكن أن تكون صورة لأى نقطة فى المستوى المركب z بالتحويلة $w = e^z$. بهذا نكون قد أوضحنا أن **مدى الدالة الأسية هو المستوى المركب بأكمله عدا نقطة الأصل** .

ويجدر بنا الإشارة إلى أنه يجب ملاحظة أن أى نقطة فى مدى الدالة الأسية تكون فى الحقيقة صورة لعدد لا نهائى من نقط المستوى المركب z . وهذا راجع إلى أن تعريف (١) للدالة الأسية يوضح أن أى نقطتين من نقط المستوى المركب z يكون لهما نفس الصورة وذلك إذا ما تساوى جزآهما الحقيقيان وكان الفرق بين جزئيهما التخيليين مضاعفا صحيحا للمقدار 2π . وهذا يعنى أن **الدالة الأسية تكون دورية** Periodic ، دورتها تخيلية ومقدارها $2\pi i$: أى أن لكل عدد مركب z يكون

$$e^{z + 2\pi i} = e^z \qquad (٧)$$

إذا ما قصرنا نطاق تعريف الدالة e^z على الشريحة $-\pi < \text{Im}\, z \leq \pi$ (شكل (١٨)) فإن الراسم $w = e^z$ يكون **تناظرا أحاديا** . أى أنه إذا كانت w أى نقطة غير صفرية صيغتها القطبية $w = \rho(\cos\Phi + i\sin\Phi)$ حيث $\Phi = \text{Arg}\, w$ فإن النقطة $z = \text{Log}\,\rho + i\Phi$ (وذلك حسب معادلتى (٤) ، (٥)) هى النقطة الوحيدة فى الشريحة التى صورتها النقطة w . وفى الحقيقة فإن هذا الراسم يكون تناظرا أحاديا طالما كان نطاق تعريف الدالة مقصورا على أى شريحة $y_0 < \text{Im}\, z \leq y_0 + 2\pi$.

ويجدر بنا التنويه إلى أن الخاصية الجمعية للدالة، أى

$$(\exp z_1)(\exp z_2) = \exp(z_1 + z_2) \qquad (٨)$$

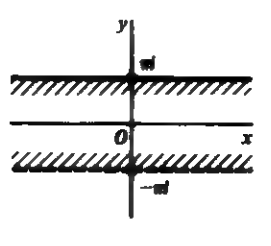
تتحقق تماماً كما فى حالة المتغير الحقيقى. ولإثبات ذلك نفرض أن $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$، إذن

$$\exp z_1 = \rho_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \quad , \quad \rho_1 = e^{x_1}, \phi_1 = y_1,$$

$$\exp z_2 = \rho_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \quad , \quad \rho_2 = e^{x_2}, \phi_2 = y_2.$$

من المعادلة (٥) بند ٥ لحاصل ضرب عددين مركبين فى الصيغة القطبية ينتج أن

$$(\exp z_1)(\exp z_2) = \rho_1\rho_2[\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)]$$
$$= e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)].$$



شكل (١٨)

وحيث أن $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ ، $x_1 + x_2 + i(y_1+y_2) = z_1 + z_2$ فإننا نكون بهذا قد أثبتنا العلاقة (٨) . ويجب ملاحظة أننا قد حصلنا على العلاقة (٨) فى بند (٥) وذلك فى الحالة الخاصة التى يكون فيها كل من z_1, z_2 تخيليا .

بإتباع نفس الأسلوب يمكننا بسهولة إثبات أن

$$\frac{\exp z_1}{\exp z_2} = \exp(z_1 - z_2). \qquad (٩)$$

من هذه العلاقة الأخيرة وحقيقة أن $e^0 = 1$ ينتج مباشرة أن $1/e^z = e^{-z}$. كذلك يمكن بسهولة إثبات صحة المتطابقة الهامة

$$(e^z)^n = e^{nz} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (١٠)$$

تمــارين

١ – اثبت أن

(أ) $\exp(2 \pm 3\pi i) = -e^2$ ؛ (ب) $\exp\frac{2+\pi i}{4} = \sqrt{e}\,\frac{1+}{\sqrt{2}}$ ؛ (جـ) $e^{z+\pi i} = -e^z$.

٢ – اذكر لماذا تكون الدالة $2z^2 - 3 - ze^z + e^{-z}$ شاملة .

٣ اوجد جميع قيم z التى تحقق :

(أ) $e^z = -2$ ؛ (ب) $e^z = 1 + \sqrt{3}i$ ؛ (جـ) $\exp(2z-1) = 1.$

الأجوبة :

(أ) $z = \text{Log}\, 2 + (2n+1)\pi i\,(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ ؛

(جـ) $z = \frac{1}{2} + n\pi i\,(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$

٤ – عبر عن $|\exp(iz^2)|$ ، $|\exp(2z+i)|$ بدلالة x,y ؛ ومن ثم إثبت أن

$$|\exp(2z+i) + \exp(iz^2)| \leq e^{2x} + e^{-2xy}.$$

٥ – اثبت أن $|e^{-2z}| < 1$ إذا وفقط إذا كان $\text{Re}\, z > 0$.

٦ – نفرض أن z أى عدد مركب غير صفرى . إثبت أنه إذا كان $z = re^{i\theta}$ فإن

(أ) $\bar{z} = re^{-i\theta}$ ؛

(ب) $\exp(\text{Log}\, r + i\theta) = z.$

٧ اثبت صحة متطابقتي (٩) ، (١٠) من بند (٢٢) .

٨ – اثبت أن $e^{-nz} = 1/(e^z)^n$ حيث $n = 1, 2, \dots$.

٩ إثبت أن

(أ) $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$ لكل عدد مركب z

(ب) $\exp (i\bar{z}) = \overline{\exp (iz)}$ إذا وفقط إذا كان $z = n\pi$ حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

١٠ – (أ) اثبت أنه إذا كان e^z عددا حقيقيا ، فإن $\text{Im } z = n\pi$ حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ،

(ب) ما هي الشروط التي يجب أن تتوفر في العدد z إذا كان e^z عددا تخيليا ؟

١١ – بين ماذا يحدث :

(أ) للدالة $\exp (x + iy)$ عندما تؤول x إلى $-\infty$ ،

(ب) للدالة $\exp (2 + iy)$ عندما تؤول y إلى ∞.

١٢ – اثبت أن الدالة $\exp \bar{z}$ لا تكون تحليلية عند أي نقطة .

١٣ – بين بطريقتين أن الدالة $\exp (z^2)$ تكون شاملة . ما هي المشتقة الأولى لهذه الدالة ؟

الإجابة : $2z \exp z^2$.

١٤ – اثبت أنه إذا كانت الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحقق شرطي (١) ، (٢) من بند (٢١) فإنها لابد وأن تكون الدالة المعرفة بالعلاقة (٣) من نفس البند .

اقتراح : استنتج أولا المعادلات $u_x = u, v_x = v$ ثم إثبت أنه يوجد دوال حقيقية ϕ ، ψ للمتغير الحقيقي y بحيث $u(x,y) = e^x\phi(y)$ ، $v(x,y) = e^x\psi(y)$. استخدم معادلتي كوشي – ريمان للحصول على المعادلة التفاضلية $\phi''(y) + \phi(y) = 0$ التي حلها $\phi(y) = a \cos y + b \sin y$ حيث a,b أعداد حقيقية . ثم اثبت أن $\psi(y) = a \sin y - b \cos y$. استخدم حقيقة أن $u(x,0) + iv(x,0) = e^x$ لإيجاد قيم a,b

١٥ – عبر عن $\text{Re}(e^{1/z})$ بدلالة x,y . لماذا تكون هذه الدالة توافقية في كل نطاق لا يحوي نقطة الأصل ؟

١٦ – نفرض أن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة تحليلية في نطاق ما D . بين لماذا تكون الدوال

$$U(x,y) = e^{u(x,y)} \cos [v(x,y)],$$
$$V(x,y) = e^{u(x,y)} \sin [v(x,y)]$$

توافقية في النطاق D ، ولماذا تكون الدالة V(x,y) هي المرافق التوافقي للدالة U(x,y) .

٢٣ – الدوال المثلثية Trigonometric Functions

من المتطابقتين

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{و} \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

ينتج أن

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

لكل عدد حقيقي x . من هذا يبدو من الطبيعي أن تعرف دالتي الجيب وجيب التمام لمتغير مركب z على النحو التالي

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{١}$$

ويجب ملاحظة أن **دالتي الجيب وجيب التمام تكونان شاملتين** وذلك أن كلا منهما تكون ارتباطا خطيا فى الدالتين الشاملتين e^{iz}, e^{-iz} (تمرين (٦) بند (٢٠)) . من معرفتنا لمشتقات الدوال الأسية الواردة فى المعادلات (١) ، فإنه يمكننا إثبات أن

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z, \qquad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z \tag{٢}$$

الدوال المثلثية الأربع الاخرى تعرف بدلالة دالتي الجيب وجيب التمام بالصورة المعتادة على النحو التالى :

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$
$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z} \tag{٣}$$

ويجب ملاحظة أن كلا من الدالتين $\tan z, \sec z$ تكون تحليلية فى أى نطاق تكون فيه $\cos z \neq 0$ ، كما أن كلا من الدالتين $\cot z, \csc z$ تكون تحليلية فى أى نطاق تكون فيه $\sin z \neq 0$. بأخذ مشتقة الطرف الأيمن لكل من المعادلات (٣) فإننا نحصل على المشتقات الأولى لبقية الدوال المثلثية على النحو التالى :

$$\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z, \qquad \frac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z,$$
$$\frac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z, \qquad \frac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z. \tag{٤}$$

من تعريف الدالة $\sin z$ ينتج أن

$$\sin z = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = (\cos x + i\sin x)\frac{e^{-y}}{2i} - (\cos x - i\sin x)\frac{e^{y}}{2i}$$
$$= \sin x\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + i\cos x\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)$$

حيث $z = x + iy$. وبالتالى يكون الجزآن الحقيقى والتخيلى للدالة $\sin z$ هما على الترتيب $\sin x \cosh y, \cos x \sinh y$ ، أى أن

$$\sin z = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y \tag{٥}$$

بإتباع نفس الأسلوب ، أو باستخدام المعادلة الأولى من المعادلات (٢) ، فإنه يمكننا إستنتاج أن :

$$\cos z = \cos x \cosh y - i\sin x \sinh y \tag{٦}$$

من هاتين العلاقتين الأخيرتين يتضح لنا أن

$$\sin(iy) = i\sinh y, \qquad \cos(iy) = \cosh y \tag{٧}$$

وأن sin z, cos z هما مرافقتا الدالتين sin z, cos z على الترتيب ، أى أن

$$\sin\bar{z} = \overline{\sin z} \qquad , \qquad \cos\bar{z} = \overline{\cos z}$$

ويجب ملاحظة أن كون كل من sin z, cos z دالة دورية يتضح من المعادلات (٥) ، (٦)

$$\sin(z+2\pi) = \sin z, \qquad \sin(z+\pi) = -\sin z, \tag{٨}$$

$$\cos(z+2\pi) = \cos z, \qquad \cos(z+\pi) = -\cos z \tag{٩}$$

كذلك فإن كون كل من الدوال المثلثية المتبقية دورية ينتج مباشرة من المتطابقات (٨) ، (٩) . فعلى سبيل المثال

$$\tan(z+\pi) = \tan z \tag{١٠}$$

٢٤ – خواص أخرى للدوال المثلثية

باستخدام المتطابقتين (١) أو المتطابقتين (٥) ، (٦) من البند السابق يمكن للقارىء بسهولة إثبات أن

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y, \tag{١}$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y. \tag{٢}$$

من هاتين العلاقتين يتضح لنا أن مقياس كل من الدالتين sin z, cos z ليس محدودا بينما تكون القيمة المطلقة لكل من الدالتين sin x, cos x ، حيث x متغير حقيقى ، أصغر من أو تساوى 1 .

ويجدر بنا الإشارة إلى أن المتطابقات المثلثية المألوفة تتحقق كذلك للدوال المثلثية ذات المتغير المركب :

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \tag{٣}$$

$$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1\cos z_2 + \cos z_1\sin z_2, \tag{٤}$$

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2, \tag{٥}$$

$$\sin(-z) = -\sin z, \qquad \cos(-z) = \cos z, \tag{٦}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \cos z, \tag{٧}$$

$$\sin 2z = 2\sin z\cos z, \qquad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z,$$

إلخ . واستنتاج هذه المتطابقات يمكن أن يبنى كلية على خصائص الدالة الأسية .

يقال لقيمة معينة للمتغير المركب z أنها **قيمة صفرية** (أو صفر) zero لدالة معطاة f إذا كان $f(z)=0$. والقيم الصفرية لدالتى الجيب وجيب التمام تكون كلها حقيقية . وفى الحقيقة فإن

$$\sin z = 0 \iff z = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad (٩)$$

$$\cos z = 0 \iff z = (n + \tfrac{1}{2})\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (١٠)$$

ولإثبات صحة (٩) سنفرض أولا أن $\sin z = 0$. من العلاقة (١) ينتج أن

$$\sin^2 x + \sinh^2 y = 0$$

وبالتالى فإن x,y لابد وأن يحققا المعادلتين

$$\sin x = 0 \quad , \quad \sinh y = 0$$

من المعلوم أن قيم x,y التى تحقق هاتين المعادلتين هى $x = n\pi$ حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ، $y = 0$ أى أن $z = n\pi$ وبالعكس إذا كانت $z = n\pi$ ، حيث n عدد صحيح ، فإنه ينتج بسهولة أن $\sin z = 0$. بهذا نكون قد أثبتنا صحة التقرير (٩) . ويمكن بإتباع نفس الأسلوب إثبات صحة التقرير (١٠) .

من (١٠) يتضح لنا أن النقط $z = (n + \tfrac{1}{2})\pi \; (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ هى النقط الشاذة الوحيدة للدالة tan z (أى أن tan z تكون تحليلية فيما عدا ذلك) .

تمـــارين

١ – اثبت أن $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ لأى عدد مركب z.

٢ – استنتج صيغ التفاضل (٤) من بند (٢٣) .

٣ – استنتج صيغتى (٦) ، (٧) من بند (٢٣) .

٤ – استنتج المطابقة (١) من بند (٢٤) ومن ثم إثبت أن $|\sinh y| \le |\sin z| \le \cosh y$

٥ – استنتج المطابقة (٢) من بند (٢٤) ومن ثم إثبت أن $|\sinh y| \le |\cos z| \le \cosh y$

٦ – اثبت أن $|\sin z| \ge |\sin x|$ ، $|\cos z| \ge |\cos x|$

٧ – استنتج صحة متطابقتى (٣) ، (٤) من بند (٢٤).

٨ – اثبت أن (أ) $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$ ؛ (ب) $1 + \cot^2 z = \csc^2 z$

٩ – إثبت صحة كل من المطابقات الآتية :

(أ) $2 \sin (z_1 + z_2) \sin (z_1 - z_2) = \cos 2z_2 - \cos 2z_1$

(ب) $2 \cos (z_1 + z_2) \sin (z_1 - z_2) = \sin 2z_1 - \sin 2z_2$

١٠ – إثبت أن $\cos (i\bar{z}) = \overline{\cos (iz)}$ لكل عدد مركب z ، أن $\sin (i\bar{z}) = \overline{\sin (iz)}$ إذا وفقط إذا كان $z = n\pi i$ حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

١١ – إثبت صحة التقرير (١٠) من بند (٢٤) .

١٢ - باستخدام المتطابقة (أ) من تمرين (٩)، إثبت أنه إذا كان $\cos z_1 = \cos z_2$ فإنه إما أن يكون $z_1 + z_2$ أو $z_1 - z_2$ مضاعف صحيح للمقدار 2π . استنتج النتيجة المناظرة عندما $\sin z_1 = \sin z_2$

١٣ - أوجد جميع جذور المعادلة $\sin z = \cosh 4$ وذلك بمساواة الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية للدالتين $\sin z, \cosh 4$.

الإجابة : $(2n + \frac{1}{2})\pi \pm 4i$ حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

١٤ - أوجد جميع جذور المعادلة $\cos z = 2$.

الإجابة : $2n\pi + i \cosh^{-1} 2$ ، أى $2n\pi \pm i\,\mathrm{Log}\,(2 + \sqrt{3})$ حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

١٥ بين بطريقتين أن كل من الدوال الآتية تكون توافقية دائماً :

(أ) $\sin x \sinh y$ ؛ (ب) $\cos 2x \sinh 2y$

١٦ نفرض أن $f(z)$ دالة تحليلية فى نطاق ما D . اذكر لماذا تكون الدالتان $\sin f(z), \cos f(z)$ تحليليتان فى نفس النطاق D . كذلك ، اكتب $w = f(z)$ واذكر لماذا يكون

$$\frac{d}{dz} \sin f(z) = \cos w \frac{dw}{dz}, \qquad \frac{d}{dz} \cos f(z) = -\sin w \frac{dw}{dz}$$

١٧ اثبت أن أى من الدالتين $\sin \bar{z}$ ، $\cos \bar{z}$ لا تكون تحليلية عند أى نقطة .

٢٥ - الدوال الزائدية Hyperbolic Functions

تعرف دالتى الجيب الزائدى وجيب التمام الزائدى لمتغير مركب كنظير تيهما فى حالة المتغير الحقيقى ، أى أن

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{١}$$

وتعرف دالة الظل الزائدى لمتغير مركب z بالمعادلة

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

ومن ثم تعرف الدوال $\coth z, \operatorname{sech} z, \operatorname{csch} z$ على أنها مقلوبات الدوال $\sinh z$، $\cosh z$ ، $\tanh z$ على الترتيب .

حيث أن كلا من الدالتين e^z, e^{-z} دالة شاملة ، فإنه ينتج من تعريف (١) أن كلا من دالتى الجيب الزائدى وجيب التمام الزائدى دالة شاملة . الدالة $\tanh z$ تكون تحليلية فى كل نطاق تكون فيه $\cosh z \neq 0$.

ويمكن بسهولة استنباط قواعد جبر ومشتقات الدوال الزائدية من التعريفات المذكورة أعلاه . فبالنسبة لصيغ المشتقات الأولى نجد أنها تماثل نظيراتها فى حالة المتغير الحقيقى ، أى أن

$$\frac{d}{dz} \sinh z = \cosh z, \qquad \frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z, \tag{٢}$$

$$\frac{d}{dz} \tanh z = \operatorname{sech}^2 z, \qquad \frac{d}{dz} \coth z = -\operatorname{csch}^2 z, \tag{٣}$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z, \qquad \frac{d}{dz} \operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \coth z \tag{٤}$$

فيما يلى سنذكر بعض المتطابقات التى تستخدم عادة

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad (٥)$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2 \quad (٦)$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2 \quad (٧)$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z, \qquad \cosh(-z) = \cosh z. \quad (٨)$$

ومن البديهى أن تكون الدوال الزائدية وثيقة الصلة بالدوال المثلثية المعرفة فى بند (٢٣) . وفى الحقيقة فإنه إذا ماتذكرنا كيف أن هذه الدوال كلها قد تم تعريفها باستخدام الدالة الأسية لوجدنا العلاقات التالية :

$$\sinh(iz) = i \sin z, \qquad \cosh(iz) = \cos z \quad (٩)$$

$$\sin(iz) = i \sinh z, \qquad \cos(iz) = \cosh z. \quad (١٠)$$

والأجزاء الحقيقية والتخيلية لدالتى الجيب الزائدى وجيب التمام الزائدى يمكن تعيينها بسهولة من المتطابقتين

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y, \quad (١١)$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y, \quad (١٢)$$

حيث $z = x + iy$. ويمكن للقارىء بسهولة أن يستنبط المتطابقتين

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y, \quad (١٣)$$

$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y \quad (١٤)$$

بعدة طرق.

ويجب ملاحظة أن كلا من دالتى الجيب الزائدى وجيب التمام الزائدى تكون دورية ودورتها $2\pi i$ ، كما أن دالة الظل الزائدى تكون دورية ودورتها πi . كذلك فإن $\sinh z = 0$ عندما $z = n\pi i$ ، $\cosh z = 0$ عندما $z = (n + \frac{1}{2})\pi i$ حيث n عدد صحيح . وفى الحقيقة فإن هذه هى الأصفار الوحيدة للدالتين $\sinh z, \cosh z$ (انظر معادلتى (٩) ، (١٠) أعلاه) .

تمـــارين

١ - إستنتج صيغ التفاضل (٢) ، (٤) من بند (٢٥) .

٢ - اثبت صحة المتطابقتين (٥)،(٧) من بند (٢٥) .

٣ - اكتب $\cosh z = \cosh(x + iy), \sinh z = \sinh(x + iy)$ ثم بين كيف أن المتطابقتين (١١) ، (١٢) من بند (٢٥) تنتج مباشرة من المتطابقات (٦) ، (٧) ، (٩) من نفس البند .

٤ – اثبت صحة المتطابقة (١٤) من بند (٢٥) ثم بين أن $|\sinh x| \leqq |\cosh z| \leqq \cosh x$.

٥ – إثبت أن $\sinh(z+\pi i) = -\sinh z,\ \cosh(z+\pi i) = -\cosh z$. استخدم ذلك لإثبات أن $\tanh(z+\pi i) = \tanh z$.

٦ – إثبت أن $\sinh 2z = 2\sinh z \cosh z$.

٧ – باستخدام التقارير (٩) ، (١٠) من بند (٢٤) مع العلاقات (١٠) من بند (٢٥) إوجد جميع أصفار كل من الدالتين sinh z, cosh z .

٨ – باستخدام النتائج التى سبق الحصول عليها فى تمرين (٧) ، عين كل القيم الصفرية والنقط الشاذة لدالة الظل الزائدى .

٩ – عين جميع جذور كل من المعادلات التالية

(أ) $\cosh z = 1/2$ ؛ (ب) $\sinh z = i$ ؛ (جـ) $\cosh z = -2$

الأجوبة : (أ) $(2n \pm \frac{1}{3})\pi i$ ؛ (ب) $(2n + \frac{1}{2})\pi i\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

١٠ – لماذا تكون الدالة $\sinh(e^z)$ شاملة ؟ عبر عن الجزء الحقيقى لهذه الدالة كدالة فى x,y ومن ثم وضح لماذا تكون هذه الدالة توافقية عند جميع النقط .

٢٦ – الدالة اللوغاريتمية The Logarithmic Function

سنفترض أن Logr ترمز للوغاريتم الطبيعى للعدد الحقيقى الموجب r كما هو معرف فيما سبق عند دراستك للمتغير الحقيقى . الدالة اللوغاريتمية للمتغير المركب z تعرف بالمعادلة

$$\log z = \text{Log}\, r + i\theta \qquad (١)$$

حيث $r = |z|$ ، $\theta = \arg z$. ويجب ملاحظة أن هذه الدالة متعددة القيم Multiple valued ، ومعرفة لجميع الأعداد المركبة الغير صفرية .

والتعريف (١) طبيعى ، بمعنى أنه يتضح لأول وهلة حال كتابتنا $z = re^{i\theta}$ واستخدام الخصائص المألوفة للوغاريتم الطبيعى التى مرت بنا وذلك لكتابة مفكوك $\log(re^{i\theta})$.

إذا كانت Θ ترمز للقيمة الأساسية لسعة العدد المركب z $(-\pi < \Theta \leqq \pi)$ فمن الممكن أن نكتب

$$\theta = \Theta + 2n\pi \qquad , \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

وبالتالى فإن الصيغة (١) تأخذ الصورة

$$\log z = \text{Log}\, r + i(\Theta + 2n\pi) \qquad (n = 0, \pm 1, +2, \ldots) \qquad (٢)$$

ويجب ملاحظة أنه لعدد مركب معين z ، فى نطاق تعريف الدالة log ، تكون قيم logz لها نفس الأجزاء الحقيقية ولكن أجزائها التخيلية تختلف عن بعضها بمضاعفات صحيحة للمقدار 2π .

القيمة الأساسية Principal value للوغاريتم logz تعرف على أنها القيمة التى نحصل عليها من الصيغة (٢) عندما تكون n=o . وسنرمز لهذه القيمة بالرمز Log z ، أى أن

$$\text{Log}\, z = \text{Log}\, r + i\Theta \quad , \quad (r > 0, -\pi < \Theta \leqq \pi) \qquad (٣)$$

الراسم w = Log z وحيد القيمة ونطاق تعريفه فئة كل الأعداد المركبة الغير صفرية ومداه الشريحة $-\pi < \text{Im}\, w \leqq \pi$.

ويجب ملاحظة أن Log z تؤول إلى اللوغاريتم الطبيعى المألوف للمتغير الحقيقى عندما نقصر نطاق تعريفها على الجزء الموجب من المحور الحقيقى . وذلك لأنه إذا كانت z هى العدد الحقيقى الموجب r فإن $|z| = r$ و $\Theta = 0$ وبالتالى فإن معادلة (٣) تصبح $\text{Log z} = \text{Log r}$.

رأينا من قبل فى بند (٢٢)، مع إحلال كل من z,w مكان الآخر، أن المعادلة $z=e^w$ تعين تناظر أحادى بين النقط الغير صفرية فى المستوى z والنقط التى تنتمى للشريحة $-\pi < \text{Im}\, w \leqq \pi$ فى المستوى w . النقطة $z = r\exp(i\Theta)$ فى المستوى z تناظر النقطة $w = \text{Log}\, r + i\Theta$ فى المستوى w ، وبالتالى ، فعندما نقصر نطاق تعريف الدالة e^w على الشريحة $-\pi < \text{Im}\, w \leqq \pi$ فإن معكوس الدالة e^w هو الدالة اللوغاريتمية الأساسية Log z . أى أن

$$w = \text{Log}\, z \quad \Longleftrightarrow \quad z = e^w$$

الراسم $z=e^w$ يعين كذلك تناظراً أحاديا بين النقط الغير صفرية فى المستوى z ونقط المستوى w التى تقع فى الشريحة $(2k-1)\pi < \text{Im}\, w \leqq (2k+1)\pi$ ، حيث k عدد صحيح معين . وعندما نقصر نطاق تعريف الدالة e^w على هذه الشريحة فإن الدالة العكسية نحصل عليها من المعادلة (٢) بوضع n=k .

٢٧ - فروع Branches الدالة log z

الدالة

$$\text{Log}\, z = \text{Log}\, r + i\Theta \quad , \quad (r > 0, -\pi < \Theta \leqq \pi) \qquad (١)$$

تكون متصلة فى النطاق $r > 0$ ، $-\pi < \Theta < \pi$ ، وهذا ينتج مباشرة باعتبار مركبتيها

$$u(r, \Theta) = \text{Log}\, r \quad \text{و} \quad v(r, \Theta) = \Theta \qquad (٢)$$

كل من الدالتين $v(r, \Theta)$ ، $u(r, \Theta)$ ، وبالتالى الدالة Log z ، تكون متصلة فى النطاق المعطى . وحقيقة أن هذا هو أكبر نطاق ممكن تكون فيه الدالة Log z متصلة تتضح من حقيقة أن الدالة u غير معرفة عند نقطة الأصل ابتداءا وكذلك من حقيقة أن قيمة الدالة

v عند أى نقطة على الجزء السالب من المحور الحقيقى تساوى دائماً π بينما توجد نقط فى كل جوار لهذه النقطة تكون عندها قيمة الدالة v قريبة جدا من $-\pi$.

الدالتين u,v (مركبتى الدالة Log z) لهما مشتقات جزئية أولى متصلة بالنسبة إلىΘ، r فى النطاق $r > 0,\ -\pi < \Theta < \pi$ ، وهذه المشتقات الجزئية تحقق الصورة القطبية (٢) ، من بند (١٨) ، لمعادلتى كوشى – ريمان عند كل نقطة فى هذا النطاق . من هذا نستنتج باستخدام النظرية المعطاة فى بند (١٨)، أن الدالة Log z تحليلية فى النطاق $r > 0,\ -\pi < \Theta < \pi$، بالإضافة إلى هذا ، إذا كان $z = re^{i\Theta}$ فإن

$$\frac{d}{dz}\operatorname{Log} z = e^{-i\Theta}\left(\frac{1}{r} + i0\right) = \frac{1}{re^{i\Theta}}$$

أى أن

$$\frac{d}{dz}\operatorname{Log} z = \frac{1}{z} \qquad (|z| > 0,\ -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi) \qquad (٣)$$

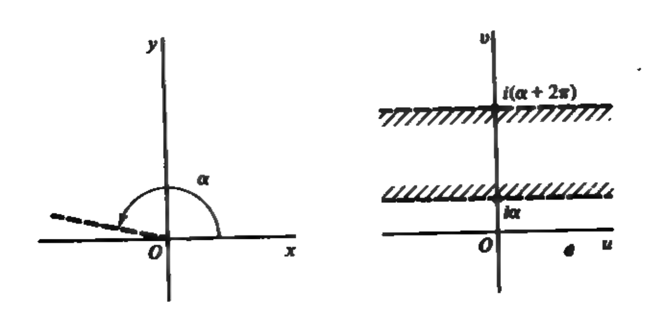
حيث أن الدالة Log z ليست متصلة عند نقطة الأصل وكذلك على الجزء السالب من المحور الحقيقى ، فإنها لا يمكن أن تكون قابلة للتفاضل هناك .

وعادة تستخدم Log z لتعبر عن كل من القيمة الأساسية للدالة log z (كما فى المعادلة (١) وكذلك الدالة التحليلية التى نحصل عليها بأن نقصر الدالة Log z على النطاق $r > 0,\ -\pi < \Theta < \pi$، وسيتضح من سياق الحديث دائماً ماذا تعنى Log z ، أى أن أى اختيار خاص آخر لنطاق تعريف Log z سيكون واضحا من السياق الخاص بها .

إذا قصرنا قيم θ فى تعريف (١) من البند السابق بحيث $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$، حيث α قيمة ثابتة اختيارية ، فإن الدالة

$$\log z = \operatorname{Log} r + i\theta \quad , \quad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi) \qquad (٤)$$

تكون وحيدة القيمة ومتصلة فى النطاق المعطى . إذا كانت w=log z فإن مدى هذه الدالة يكون الشريحة الأفقية $\alpha < \operatorname{Im} w < \alpha + 2\pi$ (شكل (١٩))



شكل (١٩)

ويجب ملاحظة أنه ، عند كل نقطة من نقاط نطاق تعريف الدالة (٤) ، يكون لمركبتيها مشتقات جزئية أولى متصلة بالنسبة للمتغيرين θ و r ، كما أن هذه المشتقات الجزئية تحقق ، عند كل نقطة من نقاط تعريف الدالة (٤) ، الصورة القطبية لمعادلتى كوشى – ريمان . وبالتالى فإن الدالة log z ، كما هى معرفة بالمعادلة (٤) ، تكون تحليلية عند كل نقطة من نقاط نطاق تعريفها ، أن

$$\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z} \qquad (|z| > 0, \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi) \qquad (٥)$$

يقال لدالة وحيدة القيمة F أنها **فرع Branch** من دالة متعددة القيم f إذا كانت F تحليلية فى نطاق ما وكانت F(z) ، لكل z فى هذا النطاق ، هى إحدى قيم f(z) .

من هذا يتضح لنا أنَّ الدالة **Log z** المعرفة على النطاق $r > 0, -\pi < \Theta < \pi$ تكون فرعا من الدالة اللوغاريتمية (١) المعرفة فى البند السابق . هذا الفرع يسمى **الفرع الأساسى Principal branch** للدالة اللوغاريتمية . الدالة (٤) تكون فرعا من نفس الدالة اللوغاريتمية المتعددة القيم .

كل نقطة من نقط الجزء السالب من المحور الحقيقى $\Theta = \pi$ وكذلك نقطة الأصل هى نقطة شاذة للفرع الرئيسى للدالة Log z ، وذلك حسب تعريفنا للنقطة الشاذة بند (١٩). الشعاع $\Theta = \pi$ يسمى **الفرع القاطع The branch cut** للفرع الأساسى . الخط المستقيم أو المنحنى المكون من نقط شاذة والذى نستخدمه عند تحديد فرع ما لدالة متعددة القيم يسمى فرعا قاطعا **Branch cut** . فمثلا الشعاع $\theta = \alpha$ هو فرع قاطع للفرع (٤) من الدالة اللوغاريتمية، والنقطة الشاذة $z = 0$ المشتركة لجميع الأفرع القاطعة لهذه الدالة المتعددة القيم تسمى **نقطة تفرع Branch point** لهذه الدالة .

٢٨ – خواص أخرى للوغاريتمات Further Properties of Logarithms

يمكن تعميم العديد من خواص اللوغاريتمات التى مرت بنا عند دراستنا للمتغير الحقيقى ، وذلك بعد إجراء بعض التعديلات البسيطة .

سنقوم أولا بإثبات صحة المتطابقة

$$e^{\log z} = z \qquad (z \neq 0) \qquad (١)$$

وهذا يعنى أنه أيا كانت القيمة التى نختارها للدالة $\log z$ فإن العدد $e^{\log z}$ سيكون دائماً هو z . لإثبات ذلك سنكتب $z = re^{i\theta}$، $\log z = \text{Log}\, r + i\theta$ حيث θ إحدى قيم $\arg z$.
وحيث أن e دالة وحيدة القيمة إذن

$$e^{\log z} = e^{\text{Log}\, r + i\theta} = e^{\text{Log}\, r} e^{i\theta} = re^{i\theta} = z$$

ولكن يجب ملاحظة أنه ليس من الصحيح أن $\log e^z$ تساوى دائماً z . وهذا واضح من حقيقة أن $\log e^z$ تكون متعددة القيم . وفى الحقيقة ، فإذا كانت $z = x + iy$ ، فإن

$$\log e^z = \text{Log}\, |e^z| + i \arg e^z = x + i(y + 2n\pi) \qquad (٢)$$
$$= z + 2n\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

نفرض أن z_1, z_2 عددان مركبان غير صفريين ،
حيث
$$z_1 = r_1 \exp(i\theta_1), \qquad z_2 = r_2 \exp(i\theta_2)$$
من السهل إثبات أن

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 \qquad (٣)$$

وهذا بطبيعة الحال يعنى أن أى قيمة للدالة $\log(z_1 z_2)$ يمكن التعبير عنها كمجموع قيمة ما للدالة $\log z_1$ وقيمة أخرى للدالة $\log z_2$ ، وبالعكس فإن مجموع أى قيمة للدالة $\log z_1$ وأى قيمة للدالة $\log z_2$ يكون قيمة للدالة $\log(z_1 z_2)$. وإثبات التقرير (٣) ينتج مباشرة من حقيقة أن $\text{Log}(r_1 r_2) = \text{Log}\, r_1 + \text{Log}\, r_2$ وحقيقة أن $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ كما سبق أن أوضحنا فى بند (٥) .
بالمثل يمكن إثبات أن

$$\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2 \qquad (٤)$$

ولتوضيح التقرير (٣) ، دعنا نكتب

$$z_1 = z_2 = -1 \qquad , \qquad \log(z_1 z_2) = \log 1 = 0.$$

المعادلة (٣) تتحقق عندما $\log z_1 = \pi i$ ، $\log z_2 = -\pi i$ ولكنها لا تتحقق ، على سبيل المثال ، عندماتكون $\log z_1 = \log z_2 = \pi i$. من هذا يتضح لنا أن التقرير (٣) ، وكذلك التقرير (٤) ، ليسا صحيحين بصفة عامة إذا وضعنا $\text{Log}\, z$ بدلا من $\log z$.

نفرض أن $z = r \exp(i\Theta)$ عدد مركب غير صفرى ، حيث Θ ترمز للقيمة الأساسية لسعة العدد z ، ونفرض أن n أى عدد صحيح موجب . إذا ما أخذنا فى اعتبارنا المعادلة التى تعطى الجذور النونية لعدد مركب غير صفرى (بند (٦)) وتعريف الدالة اللوغاريتمية المتعددة القيم ، فإننا نجد أن

$$\log(z^{1/n}) = \log\left[\sqrt[n]{r}\exp\frac{i(\Theta+2k\pi)}{n}\right]$$
$$= \log\sqrt[n]{r} + i\left(\frac{\Theta+2k\pi}{n} + 2p\pi\right)$$
$$= \frac{1}{n}\,\text{Log}\, r + i\,\frac{\Theta+2(pn+k)\pi}{n}$$

حيث k أى عدد صحيح بحيث $0 \leq k \leq n-1$ ، p أى عدد صحيح . من ناحية أخرى ،

$$\frac{1}{n}\log z = \frac{1}{n}\,\text{Log}\, r + i\,\frac{\Theta+2q\pi}{n}$$

حيث q أى عدد صحيح . من البديهى ان اى قيمة من قيم $\log(z^{1/n})$ تكون قيمة من قيم $(1/n)\log z$. لإثبات العكس ، تذكر أن باق قسمة أى عدد صحيح على عدد صحيح موجب n يكون دائماً عددا صحيحا k بحيث $0 \leq k \leq n-1$ ، أى أنه لكل عدد صحيح q يوجد عدد صحيح p وعدد صحيح k ، $0 \leq k \leq n-1$ ، بحيث $q = pn + k$. من هذا ينتج أن

$$\log(z^{1/n}) = \frac{1}{n}\log z \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{٥}$$

مع مراعاة أنه لقيمة معينة من قيم $\log(z^{1/n})$ فإن القيمة المناظر الملائمة من قيم log z للطرف الأيمن يجب اختيارها ، وبالعكس .

ويجب ملاحظة أن العلاقة (٥) والخاصية (١) تؤديان معا إلى العلاقة

$$z^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\log z\right) \tag{٦}$$

ولقيمة معينة ثابتة z فإن الطرف الأيمن للعلاقة (٦) يكون له n فقط من القيم المختلفة وهذه القيم هى قيم $z^{1/n}$.

ولكى نوضح أكثر كيف تفسر تقارير تشتمل على دوال لوغاريتمية متعددة القيم (كالتقرير (٥) مثلا) على أنها علاقات تساوى فئات فإنه يجب ملاحظة أن

$$\log(z^n) \neq n\log z \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

بصفة عامة . فمثلا فى الحالة الخاصة التى تكون فيها $z = i, n = 2$ نجد أن قيم $\log(i^2)$ هى الأعداد $(2k+1)\pi i$ حيث $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ بينما تكون قيم 2 log i هى الأعداد $(4k+1)\pi i$ حيث $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ وبالتالى فإن فئة قيم $\log(i^2)$ لا تساوى فئة قيم $2\log i$ وبالتالى فإن $\log(i^2) \neq 2\log i$.

والتقرير $\log z^n = n\log z$ قد يكون أولا يكون صحيحا لقيم معينة للمتغير المركب z والاس n وذلك عند إحلال الدالة اللوغاريتمية المتعددة القيم بأحد الفروع الوحيدة القيمة للدالة . فمثلاً ، نلاحظ أن $\text{Log}\,[(1+i)^2] = 2\,\text{Log}\,(1+i)$ بينما $\text{Log}\,[(-1+i)^2] \neq 2\,\text{Log}\,(-1+i)$.

تمـــاريـــن

١ - اثبت أن

(أ) $\text{Log}(-ei) = 1 - (\pi/2)i$ ؛ (ب) $\text{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\text{Log}\,2 - (\pi/4)i$

٢ - اثبت أنه عندما تكون $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ فإن

(أ) $\log 1 = 2n\pi i$ ؛ (ب) $\log(-1) = (2n+1)\pi i$

(جـ) $\log i = (2n + \frac{1}{2})\pi i$ ؛ (د) $\log(i^{1/2}) = (n + \frac{1}{4})\pi i$.

٣ - أوجد جميع جذور المعادلة $\log z = (\pi/2)i$ الإجابة : $z = i$

٤ - أوجد جميع جذور المعادلة

الإجابة : $z = \text{Log}\,3 + (2n+1)\pi i$ حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

٥ - اثبت صحة العلاقة (٤) من بند (٢٨)

٦ باختيار قيم غير صفرية محددة للعددين z_1, z_2 ، اثبت أن العلاقة (٤) من بند (٢٨) لا تكون دائماً صحيحة إذا وضعنا Log بدلاً من log .

٧ إذا كان $\text{Re}\,z_1 > 0$ ، $\text{Re}\,z_2 > 0$ فاثبت أن

$$\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log}\,z_1 + \text{Log}\,z_2$$

٨ اثبت أنه إذا كان $z = re^{i\theta}$ فإن

$$\text{Log}(z^2) = 2\,\text{Log}\,z \qquad (r > 0, -\pi/2 < \theta < \pi/2).$$

٩ اثبت أن (أ) إذا كان

$$\log z = \text{Log}\,r + i\theta \quad , \quad (r > 0, \pi/4 < \theta < 9\pi/4)$$

فإن $\log(i^2) = 2\log i$ ،

(ب) إذا كان

$$\log z = \text{Log}\,r + i\theta \quad , \quad (r > 0, 3\pi/4 < \theta < 11\pi/4)$$

فإن $\log(i^2) \neq 2\log i$

١٠ اثبت أنه إذا كان z أى عدد مركب غير صفرى فإن

$$z^n = \exp(n \log z) \quad , \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

فى بند (٦) قمنا بكتابة $z^0 = 1$ ، $z^n = (z^{-1})^{-n}$ عندماتكون $n = -1, -2, \ldots$ استخدم ذلك لإثبات أن العلاقة $z^n = \exp(n \log z)$ تكون صحيحة عندما $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

١١ - اثبت أنه لكل نقطة z من نقط نصف المستوى الأيمن $x > 0$ يمكن كتابة الدالة Log z على الصورة

$$\text{Log}\,z = \frac{1}{2}\text{Log}(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x}$$

حيث $-\pi/2 < \arctan t < \pi/2$ —استخدم هذه الصورة للدالة Log z والنظرية المعطاة فى بند (١٧) لاعطاء برهان آخر للتقرير « الفرع الرئيسى للدالة Log z يكون تحليليا فى النطاق $x > 0$ » ولإثبات أن المعادلة (٣) من بند (٢٧) تكون صحيحة فى هذا النطاق . لكن يجب ملاحظة أنه ستظهر بعض الصعوبات التى تتعلق بمعكوس دالة الظل ومشتقتها الأولى فى الجزء الباقى من النطاق $r > 0, \ -\pi < \Theta < \pi$ الذى تكون فيه الدالة Log z تحليلية خاصة على الخط المستقيم $x = o$.

١٢ – اثبت بطريقتين مختلفتين أن الدالة $\text{Log}\,(x^2 + y^2)$ تكون توافقية فى كل نطاق لا يحوى نقطة الأصل .

١٣ – اثبت أن (أ) الدالة Log (z-i) تكون تحليلية عند جميع النقط عدا نقط الشعاع $x \leqq 0, y = 1$.
(ب) الدالة

$$\frac{\text{Log}\,(z+4)}{z^2+i}$$

تكون تحليلية عند جميع النقط عدا النقط $\pm(1-i)/\sqrt{2}$ ونقط الشعاع $x \leqq -4, y = 0$.

١٤ – بكتابة $z = r\exp(i\theta)$ اثبت أن

$$\text{Re}\,[\log(z-1)] = \tfrac{1}{2}\,\text{Log}\,(1 - 2r\cos\theta + r^2) \qquad (z \neq 1)$$

لماذا لابد وأن تحقق هذه الدالة معادلة لابلاس عندما $z \neq 1$ ؟

٢٩ – الأسس المركبة Complex Exponents

العلاقة (٦) من البند السابق والتمرين (١٠) من نفس البند يوضحان لنا أنه يمكن تعريف z^c ، **حيثالأس c أى عدد مركب**، بالمعادلة

$$z^c = \exp(c \log z) \qquad (z \neq 0) \qquad (١)$$

ويجب ملاحظة أن الدالة الأسية المستخدمة فى الطرف الأيمن من المعادلة (١) معرفة ، بطبيعة الحال ، وفقا للمعادلة (٤) من بند (٢١) وأن log z هى الدالة اللوغاريتمية المتعددة القيم . التعريف (١) يكون إذن متآلفا بمعنى أنه يشمل كل الحالات الخاصة التى سبق ذكرها عندما $c = 1/n$ حيث $n = 1, 2, \ldots$ وعندما $c = n$ حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

ويجب ملاحظة أن هذه القوى المركبة للعدد z تكون بصفة عامة متعددة القيم . مثال ذلك

$$i^{-2i} = \exp(-2i \log i) = \exp\left[-2i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i\right]$$
$$= \exp[(4n+1)\pi] \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ويجب ملاحظة أن ، وذلك باعتبار الخاصية $e^{-z}=1/e^{z}$ ، فتى الأعداد z^{-c} ، $1/z^{c}$ متساويتان . وبالتالى فإنه يمكننا كتابة

$$z^{-c}=\frac{1}{z^{c}} \qquad (z\neq 0) \qquad (٢)$$

وهناك بعض الخواص الآخرى المألوفة للأسس التى تتحقق فى حالة المتغير المركب كما تتحقق بالنسبة للمتغير الحقيقى . فمثلا دعنا نفترض أن $z=re^{i\theta}$ وأن α عدد حقيقى . الدالة

$$\log z=\operatorname{Log} r+i\theta \qquad (r>0,\ \alpha<\theta<\alpha+2\pi) \qquad (٣)$$

تكون تحليلية **ووحيدة** القيمة فى النطاق المعطى ، وهذا هو الحال كذلك بالنسبة للدالة المحصلة $\exp(c\log z)$ من هذا نرى أن الدالة z^c المعرفة بالمعادلة (١) ، حيث $\log z$ كما هى معطاة فى (٣) ، تكون تحليلية ووحيدة القيمة فى النطاق $r>0,\ \alpha<\theta<\alpha+2\pi$. المشتقة الأولى لهذا الفرع من الدالة الأسية المتعددة القيم (١) يمكن التعبير عنها بدلالة الدالة اللوغاريتمية المعرفة بالمعادلة (٣) على النحو التالى :

$$\frac{d}{dz}z^{c}=\frac{d}{dz}\exp(c\log z)=\exp(c\log z)\frac{c}{z}$$

$$=c\frac{\exp(c\log z)}{\exp(\log z)}=c\exp[(c-1)\log z].$$

وهذه الصورة الأخيرة ما هى إلا الدالة الوحيدة القيمة cz^{c-1} ، أى أن

$$\frac{d}{dz}z^{c}=cz^{c-1} \qquad (|z|>0,\ \alpha<\arg z<\alpha+2\pi) \qquad (٤)$$

عندما تكون $\alpha=-\pi$ ، وبالتالى $-\pi<\arg z<\pi$ فإن الدالة

$$z^{c}=\exp(c\operatorname{Log} z) \qquad (z\neq 0) \qquad (٥)$$

تسمى الفرع الأساسى Principal branch للدالة الأسية المتعددة القيم (١) . وهذه الدالة تحليلية ووحيدة القيمة فى النطاق $|z|>0,\ -\pi<\operatorname{Arg} z<\pi$. وقيمة هذه الدالة عند أى نقطة z_0 فى هذا النطاق تسمى القيمة الأساسية **Principal value** للدالة z^c عند النقطة z_0

فمثلا ، الفرع الرئيسى للدالة z^i يكون

$$z^{i}=\exp(i\operatorname{Log} z)=\exp\left[i\left(\operatorname{Log} r+i\Theta\right)\right]$$

$$=\exp[i\operatorname{Log} r-\Theta]$$

حيث $r>0,\ -\pi<\Theta<\pi$، والقيمة الأساسية للدالة z^i عند $z=-i$ هى

$$\exp[i\operatorname{Log}(-i)]=\exp\left[i\left(-i\frac{\pi}{2}\right)\right]=\exp\frac{\pi}{2}$$

وكمثال آخر ، الفرع الرئيسى للدالة $z^{2/3}$ **وهو يكون**

$$\exp(\tfrac{2}{3}\operatorname{Log} z)=\exp(\tfrac{2}{3}\operatorname{Log} r+\tfrac{2}{3}i\Theta)=\sqrt[3]{r^{2}}\exp(i\tfrac{2}{3}\Theta)$$

وهو يكون دالة تحليلية فى النطاق $r>0,\ -\pi<\Theta<\pi$ (يمكن التحقق من هذا أيضاً باستخدام النظرية المعطاة فى بند (١٨)) .

لاحظ أنه عند وضع $z=e$ فى التعريف (١) فإن المقدار e^c الموجود على الجانب الأيسر يكون بصفة عامة متعدد القيم . ولكننا نحصل على التعريف المألوف للمقدار e^c عند اعتبار الفرع الرئيسى .

من تعريف (١) يمكننا القول أن **الدالة الأسية للأساس** c ، حيث c عدد مركب ثابت غير صفرى ، هى الدالة

$$c^z = \exp(z \log c) \qquad (c \neq 0) \qquad (٦)$$

عند تحديد قيمة معينة للمقدار $\log c$ فإن الدالة c^z تكون دالة شاملة للمتغير المركب z .
من السهل التحقق من أن :

$$\frac{d}{dz} c^z = c^z \log c \qquad (c \neq 0) \qquad (٧)$$

٣٠ - الدوال المثلثية العكسية Inverse Trigonometric Functions

من الممكن دائماً أن نصف الدوال العكسية للدوال المثلثية والزائدية باستخدام الدالة اللوغاريتمية .

فمثلا لتعريف معكوس دالة الجيب (أى الدالة $\sin^{-1} z$) فإننا نكتب $w=\sin^{-1} z$ عندما تكون $z=\sin w$. أى أن $w=\sin^{-1} z$ عندما

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

للتعبير عن w بدلالة z فإننا نعين أولا e^{iw} وذلك بحل المعادلة

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية فى e^{iw} وحلها هو

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2}$$

حيث $(1-z^2)^{1/2}$ كما نعلم دالة ثنائية القيمة للمتغير المركب z . بأخذ لوغاريتم كل طرف ومراعاة أن $w = \sin^{-1} z$ فإننا نحصل على :

$$\sin^{-1} z = -i \log [iz + (1 - z^2)^{1/2}] \qquad (١)$$

ويجب ملاحظة أن الدالة $\sin^{-1} z$ متعددة القيم وأن لها عدد لا نهائى من القيم عند كل نقطة z . وإذا استخدمنا فرعين محددين أحدهما لدالة الجذر التربيعى والآخر للدالة اللوغاريتمية فإن $\sin^{-1} z$ تصبح دالة تحليلية وحيدة القيمة وذلك لكونها محصلة دالتين تحليليتين

وباتباع نفس الأسلوب يمكننا كتابة معكوس دالة جيب التمام ومعكوس دالة الظل على الصورة

$$\cos^{-1} z = -i \log [z + i(1 - z^2)^{1/2}] \qquad (٢)$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log \frac{i + z}{i - z} \qquad (٣)$$

ومن الممكن إيجاد المشتقات الأولى لهذه الدوال العكسية الثلاث من الصور المذكورة أعلاه مباشرة . فمثلا المشتقة الأولى لكل من الدالتين الأولتين تكون

$$\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}; \qquad \frac{d}{dz}\cos^{-1} z = \frac{-1}{(1 - z^2)^{1/2}} \qquad (٤)$$

ومن الواضح أن هاتين المشتقتين تتوقفان على القيم المختارة للجذر التربيعي . والمشتقة الأولى للدالة الثالثة تكون

$$\frac{d}{dz}\tan^{-1} z = \frac{1}{1 + z^2}, \qquad (٥)$$

وهى لا تتوقف على الطريقة التى تجعل بها الدالة وحيدة القيمة .

يمكن دراسة الدوال الزائدية العكسية بإتباع أسلوب مماثل وبالتالى فإننا نجد أن

$$\sinh^{-1} z = \log [z + (z^2 + 1)^{1/2}], \qquad (٦)$$

$$\cosh^{-1} z = \log [z + (z^2 - 1)^{1/2}], \qquad (٧)$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{1 + z}{1 - z}. \qquad (٨)$$

أخيرا، يجب أن ننوه إلى أنه من المألوف أن نرمز لمعكوسات هذه الدوال بالرموز البديلة $\arcsin z$ ، ... إلخ

تمـــارين

١ - اثبت أنه عندما تكون $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ فإن

(أ) $(1 + i)^i = \exp(-\pi/4 + 2n\pi) \exp[(i/2) \operatorname{Log} 2]$

(ب) $(-1)^{1/\pi} = \exp[(2n + 1)i]$.

٢ أوجد القيم الأساسية لكل من

(أ) i^i ؛ (ب) $[(e/2)(-1 - i\sqrt{3})]^{3\pi i}$ ؛ (جـ) $(1 - i)^{4i}$.

الأجوبة : (أ) $\exp(-\pi/2)$ ؛ (ب) $-\exp(2\pi^2)$.

٣ إثبت أنه إذا كان $z \neq 0$ عدد مركب وكان k عدد حقيقى فإن

$$|z^k| = \exp(k \operatorname{Log} |z|) = |z|^k$$

٤ نفرض أن c,d,z أعدادا مركبة بحيث $z \neq 0$. اثبت أنه إذا كانت كل القوى المستخدمة تكون قيما أساسية فإن :

(أ) $z^{-c} = 1/z^c$ ؛ (ب) $(z^c)^n = z^{cn}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

(جـ) $z^c z^d = z^{c+d}$ ؛ (د) $z^c/z^d = z^{c-d}$.

٥ - باستخدام الفرع الأساسى للدالة z^i أوجد الدالتين $v(r,\theta)$ ، $u(r,\theta)$ إذا كان
$$z^i = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

٦ - اثبت صحة العلاقة (٧) من بند (٢٩) .

٧ - بفرض تحقق وجود $f'(z)$ أوجد صيغة للمشتقة $d[c^{f(z)}]/dz$

٨ أوجد قيم كل من :

(أ) $\tan^{-1}(2i)$ ؛ (ب) $\tan^{-1}(1+i)$

(جـ) $\cosh^{-1}(-1)$ ؛ (د) $\tanh^{-1} 0$

الأجوبة : (أ) $(n+\frac{1}{2})\pi + \frac{i}{2}\text{Log}\, 3$ حيث $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;

(د) $n\pi i$ حيث $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

٩ بفرض أن c عدد مركب ثابت غير صفرى وبمراعاة أن i^c دالة متعددة القيم . عين الشروط التى يجب وضعها على العدد الثابت c بحيث تكون جميع قيم $|i^c|$ متساوية .

الإجابة : c لابد وأن تكون عددا حقيقيا .

١٠ حل المعادلة $\sin z = 2$ لايجاد قيم z على النحو التالى :

(أ) بمساواة الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية فى الطرفين

(ب) باستخدام العلاقة (١) من بند (٣٠) .

الإجابة : $(2n+\frac{1}{2})\pi \pm i\,\text{Log}\,(2+\sqrt{3})$ حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

١١ حل المعادلة $\cos z = \sqrt{2}$

١٢ إستنتج العلاقتين (٢) ، (٤) من بند (٣٠)

١٣ إستنتج العلاقتين (٣) ، (٥) من بند (٣٠)

١٤ إستنتج العلاقتين (٦) ، (٨) من بند (٣٠)

الفصل الرابع

الرسم بدوال بسيطة

Mapping by Elementary Functions

قدمنا فى بند (١٠) تفسيرا هندسيا لدالة المتغير المركب كراسم أو تحويلة . وقد أشرنا هناك إلى أن السمة الأساسية لمثل هذه الدالة يمكن إبرازها بيانيا – إلى حد ما – من معرفتنا للكيفية التى ترسم بها هذه الدالة منحنيات ومناطق خاصة .

فى هذا الباب سنرى كيف يمكن رسم منحنيات ومناطق متنوعة باستخدام دوال تحليلية بسيطة . وسنوضح فيما بعد فى البابين التاسع والعاشر تطبيقات لهذه النتائج على مسائل فيزيائية .

٣١ – الدوال الخطية Linear Functions

الراسم

$$w = z + C, \qquad (١)$$

للمستوى المركب z فوق المستوى المركب w ، حيث c عدد مركب ثابت ، هو إنتقال بالمتجه الممثل للعدد المركب C* . أى أنه إذا كان

$$z = x + iy \qquad \text{و} \qquad C = C_1 + iC_2,$$

فإن صورة النقطة (x,y) فى المستوى المركب z هى النقطة

$$(x + C_1, y + C_2)$$

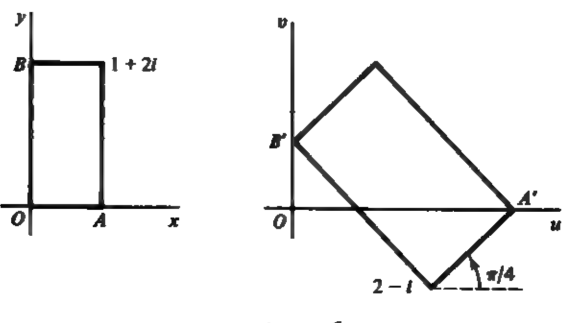
فى المستوى المركب w . حيث أن كل نقطة من نقاط أى منطقة معطاة فى المستوى المركب z ترسم إلى نقطة فى المستوى المركب w بهذا الأسلوب ، فإنه ينتج أن صورة هذه المنطقة تكون متطابقة هندسيا مع المنطقة الأصلية .

من الممكن الحصول على خصائص الراسم المعرف بالعلاقة

$$w = Bz \qquad (٢)$$

---

* أى إنتقال فى اتجاه المتجه C مقياسه يساوى طول المتجه C .



شكل (٢٠)

حيث B عدد مركب ثابت ، وذلك باستخدام الصورة القطبية لكل من B,z .
فإذا كانت $z = re^{i\theta}$ و $B = be^{i\beta}$ فإن

$$w = bre^{i(\beta+\theta)}.$$

أى أن التحويلة المعرفة بالمعادلة (٢) ترسم أى نقطة غير صفرية z احداثياتها القطبية (r,θ) فوق النقطة الغير صفرية التى إحداثياتها القطبية $(br, \beta + \theta)$ وهذا الراسم يتكون من دوران للمتجه الممثل للعدد z حول نقطة الأصل بزاوية β حيث $\beta = \arg B$ مقرونا بتمدد (تكبير) **Expansion**أو إنكماش (تصغير) **Contraction*** للمتجه بمعامل b حيث $b = |B|$. وبالتالى فإن صورة أى منطقة فى المستوى المركب z تكون مشابهة **Similar**هندسيا لهذه المنطقة .

بتطبيق التحويلة (١) على المتغير المركب w فى المعادلة (٢) فإننا نحصل على **التحويلة الخطية العامة** **Generl linear transformation**

$$w = Bz + C \qquad (B \neq 0) \qquad (٣)$$

والتى تتكون من دوران حول نقطة الأصل ومغير للبعد يعقبهما إنتقال .
ولتوضيح ذلك سنعتبر التحويلة الخطية التالية :

$$w = (1 + i)z + 2 - i \qquad (٤)$$

هذه التحويلة ترسم المنطقة المستطيلة فى المستوى المركب z (كما هو موضح بشكل (٢٠)) فوق المنطقة المستطيلة الموضحة فى المستوى المركب w . وهذا يمكن ملاحظته بوضوح أكثر إذا ما أدركنا أن التحويلة (٤) هى محصلة التحويلتين

$$w = Z + 2 - i , Z = (1 + i)z$$

وحيث أن $1 + i = \sqrt{2}\exp(i\pi/4)$ فإن التحويلة $Z = (1+i)z$ تمثل دورانا حول نقطة الأصل بزاوية مقدارها $\pi/4$ مقرونا بتكبير معامله $\sqrt{2}$. أما التحويلة الثانية فتمثل إنتقالا بالمتجه الممثل للعدد المركب 2-i .

---

* يقال لراسم أنه مغير للبعد **Dilation** إذا كان تكبيرا أو تصغيرا له .

٣٢ – الدالـة $\frac{1}{z}$

المعادلة

$$w = \frac{1}{z} \qquad (١)$$

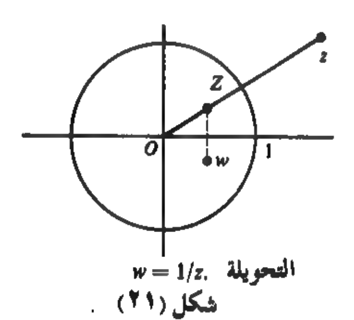
تمثل تناظرا أحاديا بين النقط الغير صفرية للمستوى المركب z والنقط الغير صفرية للمستوى المركب w . وحيث أن $z\bar{z} = |z|^2$ فإن هذا الراسم يمكن وصف تماماً بالتحويلتين الآتيتين على التعاقب

$$w = \bar{Z} \quad و \quad Z = \frac{1}{|z|^2} z \qquad (٢)$$

التحويلة $Z = \frac{1}{|z|^2} z$ عبارة عن تعاكس Inversion بالنسبة للدائرة $|z| = 1$ ؛ أى أن صورة أى نقطة غير صفرية z هى النقطة Z بحيث

$$|Z| = \frac{1}{|z|} \quad و \quad \arg Z = \arg z.$$

وبالتالى فإن النقط الخارجية للدائرة $|z| = 1$ ترسم فوق النقط الداخلية الغير صفرية للدائرة وبالعكس (شكل (٢١)) . أما أى نقطة على هذه الدائرة فإنها ترسم فوق نفسها . وأما التحويلة الثانية $w = \bar{Z}$ فهى انعكاس Reflection بالنسبة للمحور الحقيقى .



التحويلة $w = 1/z$.
شكل (٢١) .

ويجب ملاحظة أن صورة الدائرة $|z| = \varepsilon$ هى الدائرة $|w| = 1/\varepsilon$. كذلك ، فإن أى جوار $|z| < \varepsilon$ لنقطة الأصل ، لا يحوى نقطة الأصل ، يناظر الجوار $|w| > 1/\varepsilon$ النقطة اللانهاية (بند (٨)) . وعليه فمن الطبيعى أن نعرف تحويلا T على المستوى المركب الممتد وذلك بكتابة $T(0) = \infty, \; T(\infty) = 0$ و $T(z) = 1/z$ لبقية قيم z . بهذا تكون التحويلة T راسما أحاديا متصلا للمستوى المركب الممتد فوق نفسه . وقد سبق لنا إثبات اتصال هذه التحويلة فوق المستوى المركب الممتد وذلك فى تمرين (١٢ (أ)) من بند (١٥) .

إذا كانت a,b,c,d أعدادا حقيقية فإن المعادلة

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$$

تمثل دائرة أو خط مستقيم وذلك حسبما كانت $a \neq 0$ او $a = 0$ على الترتيب . بوضع $w = 1/z$ فإن هذه المعادلة تصبح

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0.$$

والتصور الهندسى لهذه المعادلة يمكن ملاحظته إذا ما استخدمنا الاحداثيات الكارتيزية ومع مراعاة أن المعادلة

$$u + iv = \frac{1}{x + iy}$$

تؤدى إلى العلاقتين

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

أو العلاقتين

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \qquad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}.$$

أى أن ، أى دائرة $(a \neq 0)$ لا تمر بنقطة الأصل $(d \neq 0)$ فى المستوى المركب z ترسم إلى دائرة لا تمر بنقطة الأصل فى المستوى المركب w . أما الدائرة المارة بنقطة الأصل فى المستوى المركب z فإنها ترسم إلى خط مستقيم لا يمر بنقطة الأصل فى المستوى المركب w . كذلك فكل خط مستقيم لا يمر بنقطة الأصل فى المستوى المركب z يرسم إلى دائرة مارة بنقطة الأصل فى المستوى المركب w ، وكل خط مستقيم مار بنقطة الأصل فى المستوى المركب z يرسم إلى خط مستقيم مار بنقطة الأصل فى المستوى المركب w . فإذا ما اعتبرنا الخطوط المستقيمة فى المستوى المركب الممتد على أنها دوائر مارة بنقطة اللانهاية فإنه يمكننا القول أن الراسم T السابق تعريفه يرسم دائماً الدوائر إلى دوائر .

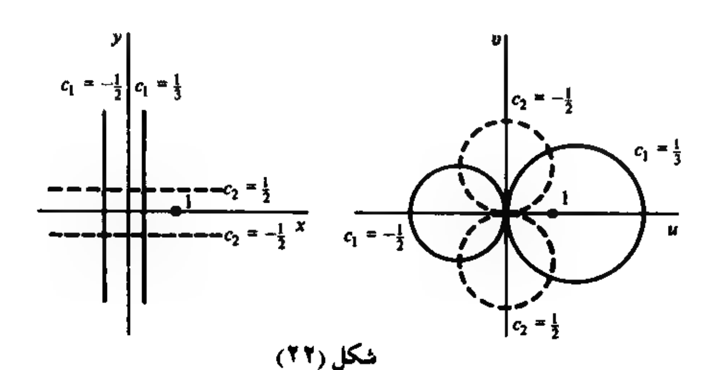
ويجب ملاحظة أن الخط المستقيم $x = c_1$ ، حيث $c_1 \neq 0$ ، يرسم إلى الدائرة

$$u^2 + v^2 - \frac{u}{c_1} = 0 \qquad (٣)$$

التى تمس محور الاحداثيات v عند نقطة الأصل ، ويجب كذلك ملاحظة أن الخط المستقيم $y = c_2$ ، حيث $c_2 \neq 0$ يرسم إلى الدائرة .

$$u^2 + v^2 + \frac{v}{c_2} = 0 \qquad (٤)$$

التى تمس محور الاحداثيات u عند نقطة الأصل (انظر شكل (٢٢)) .



شكل (٢٢)

نصف المستوى $x > c_1$ ، حيث $c_1 > 0$ ، يرسم إلى المنطقة

$$\frac{u}{u^2 + v^2} > c_1, \qquad (٥)$$

أو

$$\left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 < \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2;$$

أى أن صورة أى نقطة فى نصف المستوى المعطى تقع داخل الدائرة المعطاةبالمعادلة (٣) . وبالعكس ، فإن أى نقطة داخلية لهذه الدائرة تحقق المتباينة (٥) وبالتالى فإنها تكون صورة لنقطة فى نصف المستوى المعطى . من هذا ينتج أن صورة نصف المستوى المعطى هى داخلية الدائرة (المنطقة الداخلية للدائرة) .

الدالة $1/z$ تلعب دورا هاما فى دراسة خواص دالة ما f عندما تشمل هذه الدراسة نقطة اللانهاية . إذا كانت نهاية $f(z)$ عندما تؤول z إلى ∞ تساوى العدد المركب w_0 ، فإنه يمكننا تعريف f عند ∞ على أنها w_0 وبالتالى فإن f تصبح متصلة عند اللانهاية وبالتالى نكتب $f(\infty) = w_0$ ويمكن تعيين العدد w_0 أيضاً وذلك بحساب نهاية $f(1/z)$ عندما تؤول z إلى الصفر . وذلك لأنه من تعريفات النهايات المعطى فى بند (١١)

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0. \qquad (٦)$$

بنفس الطريقة يمكننا أن نجعل الدالة f متصلة عند نقطة ما z_0 وذلك بكتابة $f(z_0) = \infty$ وذلك فى الحالة التى تكون فيها نهاية $1/f(z)$ تساوى صفرا عندما تؤول z إلى z_0 . ويجب ملاحظة أن هذا يتفق تماماً مع التعريف المعطى للدالة T فى بداية هذا البند وذلك عند توسيع نطاق تعريف الدالة $1/z$ ليشمل النقطة ∞ .

ولتوضيح ذلك دعنا نعتبر الدالة

$$f(z) = \frac{4z^2}{(1 - z)^2}.$$

لجعل هذه الدالة متصلة عند ∞ نكتب $f(\infty) = 4$ وذلك حيث أن الدالة

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{4}{(z - 1)^2}$$

تؤول إلى 4 عندما تؤول z إلى الصفر . من الممكن أيضاً أن نجعل f متصلة عند النقطة $z = 1$ وذلك بكتابة $f(1) = \infty$ حيث أن نهاية الدالة $1/f(z)$ تساوى صفراً عندما تؤول z إلى 1

وأخيرا ، فإنه يمكننا كتابة $f(\infty) = \infty$ إذا كانت نهاية الدالة $1/f(1/z)$ تساوى الصفر عندما تؤول z إلى الصفر

تمـــاريـــن

١ – اثبت أن التحويلة $w = iz$ تمثل دورانا للمستوى المركب z بزاوية مقدارها $\pi/2$. أوجد صورة الشريحة اللانهائية $0 < x < 1$ بهذه التحويلة.

الإجابة : $0 < v < 1$

٢ – اثبت أن التحويلة $w = iz + i$ ترسم نصف المستوى $x > 0$ فوق نصف المستوى $v > 1$

٣ – عين المنطقة التى يرسم فوقها نصف المستوى $y > 0$ بالتحويلة $w = (1 + i)z$ وذلك باستخدام :

(أ) الإحداثيات القطبية ، (ب) الاحداثيات الكارتيزية

ارسم هذه المنطقة

الإجابة : $v > u$

٤ – أوجد صورة المنطقة $y > 1$ بالتحويلة $w = (1 - i)z$

٥ – أوجد صورة الشريحة نصف اللانهائية $x > 0, 0 < y < 2$ بالتحويلة $w = iz + 1$.

ارسم هذه الشريحة وكذلك صورتها

الإجابة $-1 < u < 1, v > 0$

٦ – صف هندسيا التحويلة $w = B(z + C)$ حيث B,C اعدادا مركبة ثابتة $B \neq 0$

٧ – اثبت أنه إذا كانت $c_1 < 0$ فإن صورة نصف المستوى $x < c_1$ بالتحويلة $w = 1/z$ هى داخلية دائرة .

ماذا تكون صورة نصف المستوى عندما $c_1 = 0$ ؟

٨ – إثبت أن صورة نصف المستوى $y > c_2$ بالتحويلة $w = 1/z$ تكون داخلية دائرة وذلك بشرط أن $c_2 > 0$. اوجد صورة نصف المستوى عندما تكون $c_2 < 0$ وكذلك عندما $c_2 = 0$

٩ – أوجد صورة الشريحة اللانهائية $0 < y < 1/(2c)$ بالتحويلة $w = 1/z$ ارسم هذه الشريحة وصورتها

الإجابة : $u^2 + (v + c)^2 > c^2, v < 0$

١٠ أوجد صورة ربع المستوى $x > 1, y > 0$ بالتحويلة $w = 1/z$

الإجابة: $|w - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}, v < 0$

١١ – تحقق من أن صور المناطق والحدود الموضحة فى

(أ) شكل (٤) ملحق (٢) ، (ب) شكل (٥) ملحق (٢)

بالراسم $w = 1/z$ تكون كما هى مبينة هناك .

١٢ – صف هندسيا التحويلة $w = 1/(z - 1)$

١٣ - صف هندسيا التحويلة $w = i/z$ وبين كذلك أنها ترسم الدوائر إلى دوائر والخطوط المستقيمة إلى خطوط مستقيمة .

١٤ - أوجد صورة الشريحة نصف - اللانهائية $x \geqq 0,\ 0 \leqq y \leqq 1$ بالتحويلة $w = i/z$.ارسم هذ الشريحة وصورتها

الإجابة : $0 \leqq \phi \leqq \pi/2,\ \rho \geqq \cos\phi$ **حيث** $w = \rho e^{i\phi}$.

١٥ - أوجد صورة القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$ بالتحويلة $w = 1/z$

الإجابة : $\rho^2 = \cos 2\phi$ **حيث** $w = \rho e^{i\phi}$

١٦ - اعتبر اتجاها دورانيا للدائرة $|z| = 1$ ضد عقارب الساعة . عين الاتجاه الدورانى لصورتها بالتحويلة $w = 1/z$

١٧ - اثبت أنه عندما ترسم دائرة إلى دائرة بالتحويلة $w = 1/z$ فإن مركز الدائرة الأصلية لا يمكن أن يرسم فوق مركز الدائرة الصورة .

١٨ - اثبت التقرير (٦) من بند (٣٢) .

١٩ - اثبت أن

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0.$$

٢٠ - عين $f(-1)$ ، $f(\infty)$ بحيث إذا كانت

$$f(z) = \frac{-z+1}{z+1} \qquad (z \neq -1,\ \infty),$$

فإن الدالة f تصبح متصلة فى المستوى المركب الممتد بأكمله .

الإجابة : $f(-1) = \infty,\ f(\infty) = -1$

٣٣ - التحويلات الخطية الكسرية Linear Fractional Transformations

التحويلة

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad - bc \neq 0) \qquad (١)$$

حيث a,b,c,d اعداد مركبة ثابتة ، تسمى **تحويلة خطية كسرية** أو تحويلة موبيس **Mobius transformation**. عندما c = o فإن هذه التحويلة تصبح تحويلة خطية (بند (٣١)) . عندما $c \neq 0$ فإنه يمكن كتابة المعادلة (١) على الصورة

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c}\,\frac{1}{cz+d} \qquad (٢)$$

وهذه الصورة الأخيرة توضح كيف أن الشرط $ad - bc \neq 0$ يضمن لنا أن التحويلة الخطية الكسرية ليست دالة ثابتة .

إذا حررنا المعادلة (١) من الكسور فإنها تأخذ الصورة

$$Azw + Bz + Cw + D = 0 \qquad (٣)$$

وهذه المعادلة الأخيرة تكون خطية بالنسبة إلى كل من w,z ، أى أنها ثنائية الخطية **Bilinear** فى z,w . وبالتالى فإنه يمكننا إعطاء اسم آخر هو التحويلة الثنائية الخطية **Bilinear transformation** للتحويلة الخطية الكسرية .

بحل المعادلة (١) بالنسبة إلى z فإننا نجد أن

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}. \qquad (٤)$$

وبالتالى إذا كانت c = o فإن كل نقطة من نقط المستوى المركب w تكون صورة نقطة وحيدة من نقط المستوى المركب z . وهذا أيضاً صحيح إذا كانت $c \neq 0$ وذلك فيما عدا عند النقطة $w = a/c$. سنقوم الآن بتوسيع نطاق تعريف التحويلة (١) وذلك للحصول على تحويلة خطية كسرية T معرفة على المستوى المركب الممتد z بأكمله . لذلك سنكتب أولا

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \qquad (٥)$$

وسنكتب بعد ذلك $T(\infty) = \infty$ إذا كانت c = o ، وسنكتب $T(\infty) = a/c$ ، $T(-d/c) = \infty$ إذا كانت $c \neq 0$.وهذا يتفق مع ما اصطلحنا عليه فى نهاية البند السابق .

وبتوسيع نطاق تعريف الدالة الخطية الكسرية بهذه الصورة ، فإنها تصبح راسما **أحاديا** من المستوى المركب الممتد **فوق** نفسه . أى أن ، $T(z_1) \neq T(z_2)$ طالما كان $z_1 \neq z_2$ ولكل نقطة w فى المستوى المركب الممتد يوجد نقطة z فى نفس المستوى بحيث T(z) = w .

وبالتالى فإنه لابد وأن تصاحب التحويلة T تحويلة أخرى T^{-1} (تسمى **تحويلة عكسية** أو **معكوس التحويلة** T) معرفة أيضاً على المستوى المركب الممتد كالتالى :

$$T^{-1}(w) = z \quad \Longleftrightarrow \quad T(z) = w.$$

إذا أحللنا كل من z,w مكان الآخر فى هذا التعريف وفى المعادلة (٤) فإننا نجد

$$T^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a} \qquad (ad - bc \neq 0).$$

أى أن T^{-1} هى أيضاً تحويلة خطية كسرية حيث $T^{-1}(\infty) = \infty$ إذا كانت c = o و $T^{-1}(a/c) = \infty$ و $T^{-1}(\infty) = -d/c$ إذا كانت $c \neq 0$.

إذا كانت T,S تحويلتين خطيتين كسريتين فإن محصلتهما S [T (z)] تكون تحويلة خطية كسرية . وهذا يمكن التحقق منه بسهولة وذلك بتحصيل تعبيرين على شاكلة (٥) .

لقد لاحظنا أنه إذا كانت $c = o$ فإن التحويلة الخطية الكسرية (١) تأخذ الصورة الخاصة $w = Bz + C$ حيث $B \neq 0$. من ناحية أخرى ، إذا كانت $c \neq 0$ فإن الصورة (٢) للمعادلة (١) توضح أن التحويلة الخطية الكسرية تكون محصلة التحويلات الخاصة

$$Z = cz + d, \qquad W = \frac{1}{Z}, \qquad w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} W.$$

من هذا ينتج أن التحويلة الخطية الكسرية ترسم دائما الدوائر إلى دوائر وذلك حيث أن كلا من هذه التحويلات الكسرية الخاصة ترسم الدوائر إلى دوائر (انظر بندى (٣١) ، (٣٢)) . ويجب ملاحظة أننا نعتبر دائماً الخطوط المستقيمة فى المستوى المركب الممتد دوائر مارة بنقطة اللانهاية .

ويجدر بنا أن ننوه إلى أنه توجد تحويلة خطية كسرية وحيدة ترسم أى ثلاث نقط مختلفة معطاة z_1,z_2,z_3 فوق ثلاث نقط مختلفة محددة w_1,w_2,w_3 على الترتيب . وفى الحقيقة فإن المعادلة

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \qquad (٦)$$

تعطى هذه التحويلة الوحيدة . ولتوضيح ذلك ، يجب أولا ملاحظة أنه يمكن كتابة المعادلة (٦) على الصورة المكافئة

$$(z - z_3)(w - w_1)(z_2 - z_1)(w_2 - w_3) = (z - z_1)(w - w_3)(z_2 - z_3)(w_2 - w_1), \qquad (٧)$$

وهذه الصورة الأخيرة يمكن وضعها بالتالى على الصورة (٣) وذلك بفك الأقواس . ثانيا يجب ملاحظة أنه إذا كان $z = z_1$ فإن الطرف الأيمن من المتطابقة (٧) ينعدم وبالتالى فإن $w = w_1$. بالمثل ، إذا كان $z = z_3$ فإن الطرف الأيسر من المتطابقة (٧) ينعدم وبالتالى فإن $w = w_3$. إذا كان $z = z_2$ فإننا نحصل على المعادلة الخطية

$$(w - w_1)(w_2 - w_3) = (w - w_3)(w_2 - w_1).$$

التى حلها الوحيد هو $w = w_2$. وكتمرين سنترك للقارىء مهمة إثبات أن المعادلة (٦) تعين التحويلة الخطية الكسرية الوحيدة التى ترسم النقط z_1,z_2,z_3 فوق النقط w_1,w_2,w_3 على الترتيب .

ويمكن دائماً اعتبار نقطة اللانهاية على أنها إحدى النقط المعينة سواء فى المستوى المركب z أو المستوى المركب w وذلك عند استخدامنا للمعادلة (٦) . فمثلا إذا كانت $w_2 = \infty$ فإننا نضع $1/w_2$ بدلا من w_2 فى هذه المعادلة ثم نكتب $w_2 = o$ ، وذلك

بعد إجراء الاختصارات اللازمة فى كل من بسط ومقام الطرف الأيسر من المعادلة (٦) . وهذا يؤدى للحصول على المعادلة

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}. \qquad (٨)$$

ولنوضح ما ذكرناه ، دعنا نعين التحويلة الخطية الكسرية T التى ترسم : $z_1 = 1$ ، $z_2 = 0$ ، $z_3 = -1$ فوق $w_1 = i,\ w_2 = \infty,\ w_3 = 1$ على الترتيب . بالتعويض بالقيم المعطاة $w_1, w_2, w_3, z_1, z_2, z_3$ فى المعادلة (٨) فإننا نجد أن

$$w=\frac{(1+i)z+(i-1)}{2z}$$

ومن السهل التحقق من أن النقط المعطاة فى المستوى المركب z ترسم فوق النقط المحددة فى المستوى المركب w .

٣٤ - بعض التحويلات الخطية الكسرية الخاصة

Special Linear Fractional Transformations

دعنا نحاول تعيين كل التحويلات الخطية الكسرية التى ترسم نصف المستوى العلوى $\operatorname{Im} z \geqq 0$ فوق القرص الدائرى $|w| \leqq 1$ الذى نصف قطره الوحدة حيث أن التحويلة الخطية الكسرية

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc\neq 0) \qquad (١)$$

ترسم دائماً الخطوط المستقيمة فى المستوى المركب z إلى دوائر أو خطوط مستقيمة فى المستوى المركب w ، فإنه ينتج أن حد نصف المستوى $\operatorname{Im} z \geqq 0$ (أى الخط المستقيم $\operatorname{Im} z = 0$) يرسم إما إلى دائرة أو خط مستقيم . وفى الحقيقة فإن الخط المستقيم $\operatorname{Im} z = 0$ لابد وأن يرسم إلى دائرة وذلك لأن صورته تكون محتواة فى القرص الدائرى $|w| \leqq 1$ وبالتالى فإنها لابد وأن تكون محدودة . دعنا نفترض الآن أن بعض نقط هذه الدائرة (أى صورة الخط المستقيم $\operatorname{Im} z = 0$) تنتمى إلى داخلية الدائرة : $|w| = 1$ (أى الفئة $|w| < 1$) . حيث أن الدالة المعرفة بالمعادلة (١) دالة متصلة للمتغير z فإنه لابد وأن توجد نقطة أسفل محور السينات مباشرة ترسم فوق نقطة بالقرب من هذه الدائرة وتنتمى إلى داخلية الدائرة $|w| = 1$. ولكن هذه النقطة ذاتها ستكون أيضاً صورة لنقطة على أو فوق محور السينات وذلك حيث أن التحويلة المطلوبة ترسم نصف المستوى فوق القرص الدائرى . ولكن هذا يناقض حقيقة أن التحويلة الخطية الكسرية المعرفة على المستوى بأكمله تمثل راسما أحاديا . وبالتالى فإن صورة الخط

المستقيم $\text{Im}\, z = 0$ (حد نصف المستوى) لابد وأن تكون الدائرة $|w| = 1$ (أى حد القرص الدائرى) .

الآن، التحويلة الخطية الكسرية التى ترسم الخط المستقيم $\text{Im}z = 0$ فوق الدائرة $|w| = 1$ تتعين بصورة وحيدة إذا أعطينا ثلاث نقط على الخط المستقيم وصورها على الدائرة . لنفترض أننا اخترنا النقط $z = \infty$ ، $z = 1$ ، $z = 0$ على الخط المستقيم ولنحاول تعيين كل التحويلات الخطية على الصورة (١) التى ترسم هذه النقط فوق نقط تنتمى للدائرة $|w| = 1$ من المعادلة (١) ، نجد أن

$$|w| = 1 \quad , \quad z = 0 \quad \Longrightarrow \quad |d| = |b| \tag{٢}$$

$$|w| = 1 \quad , \quad z = \infty \quad \Longrightarrow \quad |c| = |a| \tag{٣}$$

من المعادلة (٣) وحقيقة أن $ad - bc \neq 0$ فإنه ينتج أن $c \neq 0$, $a \neq 0$. إذن

$$w = \frac{a}{c}\frac{z + b/a}{z + d/c},$$

أو

$$w = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{z - z_1} \tag{٤}$$

، وهذا يرجع إلى أن $|a/c| = 1$ ، حيث α ثابت حقيقى اختيارى وحيث z_0, z_1 أعدادا مركبة ثابتة.من معادلتى (٢)، (٣) نعلم أن $|b/a| = |d/c|$ و بالتالى فإن $|z_0| = |z_1|$.

المطلوب الآن أن تكون المعادلة (٤) أيضاً متحققة باستيفاء الشرط $|w| = 1$ عندما $z = 1$. وهذا يؤدى إلى أن

$$|1 - z_1| = |1 - z_0|,$$

أو

$$(1 - z_1)(1 - \bar{z}_1) = (1 - z_0)(1 - \bar{z}_0).$$

ولكن $z_1\bar{z}_1 = z_0\bar{z}_0$ وذلك حيث أن $|z_1| = |z_0|$ وبالتالى فإن هذه العلاقة الأخيرة تؤول إلى

$$z_1 + \bar{z}_1 = z_0 + \bar{z}_0,$$

أو $\text{Re}z_1 = \text{Re}z_0$. من هذا ينتج أنه إما أن يكون $z_1 = z_0$ أو $z_1 = \bar{z}_0$ (هذا راجع مرة أخرى إلى أن $|z_1| = |z_0|$) . والشرط $z_1 = z_0$ يعنى أن الراسم $w = e^{i\alpha}$ يرسم المستوى المركب z بأكمله فوق نقطة واحدة . وبالتالى فلابد وأن تكون $z_1 = \bar{z}_0$.

إذن التحويلة المطلوبة لابد وأن تكون على الصورة

$$w = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}. \tag{٥}$$

لاحظ أن النقطة $w=0$ هى صورة z_0 . وبالتالى فإن النقطة z_0 لابد وأن تقع فوق المحور الحقيقى ، أى

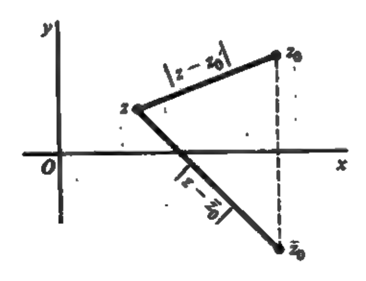
$$\text{Im } z_0 > 0. \quad (٦)$$

بقى الآن أن نبين أنه بتحقق الشرط (٦) فإن التحويلة (٥) ترسم فعلا نصف المستوى $\text{Im } z \geqq 0$ فوق القرص الدائرى $|w| \leqq 1$. وسنحقق هذا بتفسير المعادلة

$$|w| = \frac{|z - z_0|}{|z - \bar{z}_0|}$$

هندسيا . إذا كانت النقطة z تقع فوق المحور الحقيقى ، فمعنى هذا أنها والنقطة z_0 تقعان على جانب واحد من المحور الحقيقى الذى هو فى الواقع المنصف العمودى للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $\bar{z}_0$, z_0 . من هذا ينتج أن المسافة $|z - z_0|$ تكون أقل من المسافة $|z - \bar{z}_0|$ (شكل (٢٣)) ، أى أن $|w| < 1$. بالمثل ، إذا كانت z تقع تحت المحور الحقيقى فإن المسافة $|z - z_0|$ تكون أكبر من المسافة $|z - \bar{z}_0|$ وبالتالى فإن $|w| > 1$ حيث أن كل تحويلة خطية كسرية تكون راسم أحادى من المستوى المركب الممتد فوق نفسه فإنه ينتج أن كل نقطة w . بحيث $|w| < 1$ لابد وأن تكون صورة نقطة وحيدة z فوق المحور الحقيقى .

مما سبق نستخلص أن أى تحويلة خطية كسرية على الصورة (٥) ، حيث العدد الحقيقى α اختيارى وحيث الجزء التخيلى من العدد المركب z_0 موجب ، تمثل راسما أحاديا يرسم نصف المستوى $\text{Im } z \geqq 0$ فوق القرص الدائرى $|w| \leqq 1$.



شكل (٢٣)

وهذه النتيجة يمكن استخدامها لتوضيح أن التحويلة المحايدة ليست بالضرورة الراسم الوحيد الذى يرسم نطاقا معينا فوق نفسه . وفى الحقيقة فإن أى تحويلة خطية كسرية على الصورة

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}, \qquad (٧)$$

، حيث α عدد حقيقى ، $|z_0| < 1$ ، تمثل راسما أحاديا يرسم القرص الدائرى $|z| \leqq 1$ فوق القرص الدائرى $|w| \leqq 1$. وسنترك مهمة إثبات ذلك للقارىء كتمرين .

تماريــن

١ - أوجد التحويلة الخطية الكسرية التى ترسم النقط $z_1 = 2, \; z_2 = i, \; z_3 = -2$ فوق النقط $w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$ على الترتيب

الإجابة : $w = (3z + 2i)/(iz + 6)$

٢ - أوجد التحويلة الخطية الكسرية التى ترسم النقط $z_1 = -i, \; z_2 = 0, \; z_3 = i$ فوق النقط $w_1 = -1, w_2 = i, w_3 = 1$ على الترتيب . ما هى صورة المحور التخيلى بهذه التحويلة ؟

٣ أوجد التحويلة ثنائية الخطية التى ترسم النقط $z_1 = \infty, z_2 = i, z_3 = 0$ فوق النقط $w_1 = 0, w_2 = i, w_3 = \infty$

الإجابة : $w = -1/z$

٤ أوجد التحويلة ثنائية الخطية التى ترسم النقط z_1, z_2, z_3 فوق النقط $w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = \infty$

الإجابة : $w = [(z - z_1)(z_2 - z_3)]/[(z - z_3)(z_2 - z_1)]$

٥ - اثبت أن تحصيل تحويلتين خطيتين كسريتين يكون دائماً تحويلة خطية كسرية .

٦ - يقال لنقطة z_0 أنها نقطة ثابتة بالنسبة للراسم $w = f(z)$ إذا كان $z_0 = f(z_0)$. إثبت أن كل تحويلة ثنائية الخطية ، فيما عدا التحويلة المحايدة $w = z$ ، يكون لها على الأكثر نقطتان ثابتتان فى المستوى المركب الممتد .

٧ - أوجد النقط الثابتة (تمرين (٦)) للتحويلات التالية :

(أ) $w = (z - 1)/(z + 1)$ ، (ب) $w = (6z - 9)/z$

الأجوبة: (أ) $z = \pm i$ ، (ب) $z = 3$

٨ - عدل معادلة (٦) من بند (٣٣) للحالة التى تكون فيها كل من z_2, w_2 هى نقطة اللانهاية . ثم اثبت أن أى تحويلة خطية كسرية لابد وأن تكون على الصورة $w = az$ عندما تكون نقطتاها الثابتتان (تمرين (٦)) هما صفر ، ∞ .

٩ - اثبت أنه إذا كانت نقطة الأصل نقطة ثابتة (تمرين ٦) لتحويلة خطية كسرية ، فإن هذه التحويلة يمكن كتابتها على الصورة $w = z/(cz + d)$.

١٠ - تحقق من أن الراسم $w = (z-1)/(z+1)$ يرسم النطاق المعطى بشكل (١٢) ملحق (٢) فوق النطاق المعطى بنفس الشكل.

١١ - عين الكميات الثابتة فى التحويلة (٥) من بند (٣٤) التى ترسم نصف المستوى $\text{Im } z \geqq 0$ فوق القرص الدائرى $|w| \leqq 1$ بحيث تكون صور النقط $z = 1 \quad z = 0, \quad z = \infty,$ هى النقط $w = i \quad w = 1, \quad w = -1,$ على الترتيب . اثبت أن صورة الجزء الموجب من محور السينات هى النصف العلوى للدائرة $|w| = 1$ ، ثم حقق صحة الراسم الموضح بشكل (١٣) ملحق (٢) .

١٢ - استخدم التحويلة $w = (i-z)/(i+z)$ الموضحة بشكل (١٣) ملحق (٢) لإثبات أن القرص الدائرى $|z-1| \leqq 1$ يرسم فوق نصف المستوى $\text{Re } w \leqq 0$ بالتحويلة الخطية الكسرية $w = (z-2)/z$.

اقتراح : قم أولا بإجراء انتقال مقياسه الوحدة فى اتجاه اليسار للقرص الدائرى المعطى . بعد ذلك استخدم معكوس التحويلة المعطاة فى بند (٢) لرسم القرص وأتبع ذلك بدوران مقياسه $\pi/2$.

١٣ - التحويلة (٥) من بند (٣٤) بالاضافة إلى الشرط (٦) ترسم النقطة $z = \infty$ فوق النقطة $w = \exp(i\alpha)$ التى تقع على حد القرص الدائرى $|w| \leqq 1$. (أى على الدائرة $|w| = 1$).
إثبت أنه إذا كان $0 < \alpha < 2\pi$ وكانت النقط $z = 1$ ، $z = 0$ ترسم فوق النقط:
$w = \exp(i\alpha/2)$ ، $w = 1$ على الترتيب فإنه يمكن كتابة التحويلة على الصورة

$$w = \exp(i\alpha)\, \frac{z + \exp(-i\alpha/2)}{z + \exp(i\alpha/2)} .$$

١٤ - لاحظ أنه عندما تكون $\alpha = \pi/2$ فإن التحويلة المعطاة فى مسألة (١٣) تصبح

$$w = \frac{iz + \exp(i\pi/4)}{z + \exp(i\pi/4)} .$$

حقق أن هذه التحويلة الخاصة ترسم نصف المستوى $\text{Im } z > 0$ وإجزاء من حده كما هو موضح بشكل (٢٤).

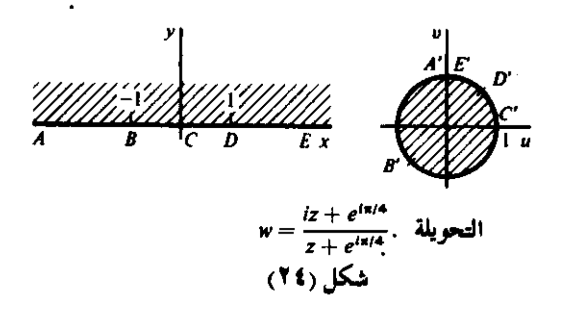
١٥ - اثبت أنه عندما تكون $\text{Im } z_0 < 0$ فإن التحويلة (٥) من بند (٣٤) ترسم نصف المستوى السفلى $\text{Im } z \leqq 0$ فوق القرص الدائرى $|w| \leqq 1$.

١٦ - استخلص التحويلة (٧) من بند (٣٤).

اقتراح : من الممكن استخدام تحويلتين خطيتين كسريتين متتابعتين الأولى ترسم القرص الدائرى $|z| \leqq 1$ فوق نصف المستوى $\text{Im } Z \geqq 0$ والثانية ترسم نصف المستوى الأخير فوق القرص الدائرى $|w| \leqq 1$.

١٧ - اثبت أنه عندما تكون $z_0 = 0$ فإن التحويلة (٧) من بند (٣٤) تكون دورانا للمستوى حول نقطة الأصل بزاوية مقدارها $\alpha + \pi$.

١٨ - اثبت أنه لا توجد تحويلة خطية كسرية على الصورة (٧) من بند (٣٤) ترسم القرص الدائرى $|z| \leqq 1$ فوق القرص الدائرى $|w| \leqq 1$ بحيث ترسم النقط $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$ فوق النقط $w_1 = 1, w_2 = -i, w_3 = -1$ على الترتيب .



التحويلة $w = \frac{iz + e^{i\pi/4}}{z + e^{i\pi/4}}$.
شكل (٢٤)

١٩ - اثبت أن معادلة (٦) من بند (٣٣) تعين التحويلة الخطية الكسرية الوحيدة التى ترسم ثلاث نقاط مختلفة معطاة z_1, z_2, z_3 فوق ثلاث نقاط مختلفة محددة w_1, w_2, w_3 على الترتيب .

اقتراح : افرض أن T,S تحويلتان خطيتان كسريتان تحققان الشروط المعطاة باستخدام نتيجة مسألة (٦) إثبت أن $w = S^{-1}[T(z)]$ هى التحويلة المحايدة $w = z$

٢٠ - اثبت أنه إذا رسمت تحويلة ثنائية الخطية كل نقطة من نقط محور السينات فوق نقطة من نقط محور الاحداثيات u فإن المعاملات فى هذه التحويلة تكون كلها حقيقية ، فيما عدا ربما لعامل مشترك مركب . ومعكوس هذا التقرير واضح .

٣٥ - الدالة z^n The Function

دعنا أولا نعتبر التحويلة

$$w = z^2 \qquad (١)$$

التى يمكن وصفها بسهولة باستخدام الاحداثيات القطبية . إذا كان $w = \rho e^{i\phi}, z = re^{i\theta}$ فإن

$$\rho e^{i\phi} = r^2 e^{i2\theta}.$$

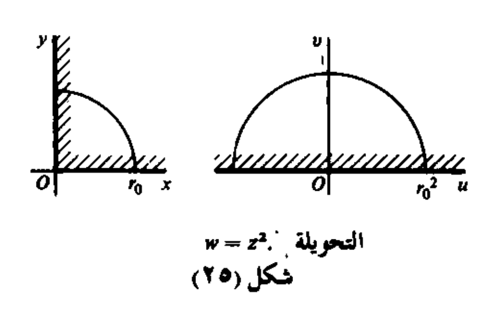
وبالتالى فإن صورة أى نقطة غير صفرية z يمكن إيجادها بتربيع مقياس العدد z ومضاعفة سعة العدد z ، أى أن

$$|w| = |z|^2 \quad و \quad \arg w = 2 \arg z$$

لاحظ أن التحويلة (١) ترسم المستوى المركب z بأكمله فوق المستوى المركب w بأكمله . وهذه التحويلة تكون راسما أحاديا من الربع الأول $r \geqq 0, 0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ من المستوى المركب z فوق نصف المستوى العلوى $\rho \geqq 0, 0 \leqq \phi \leqq \pi$ من المستوى،

المركب w (شكل (٢٥)). كذلك فإنها تكون راسما من نصف المستوى العلوى $r \geqq 0, 0 \leqq \theta \leqq \pi$ من المستوى المركب z فوق المستوى المركب w بأكمله . ولكن يجب ملاحظة أنه فى هذه الحالة لا تكون التحويلة أحادية وذلك حيث أن كلا من الجزء الموجب والجزء السالب من المحور الحقيقى فى المستوى المركب z يرسم فوق الجزء الموجب من المحور الحقيقى فى المستوى المركب w .

الدائرة $r = r_0$ ترسم إلى الدائرة $\rho = r_0^2$ ، والقطاع $r \leqq r_0, 0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ يرسم فوق المنطقة النصف دائرية $\rho \leqq r_0^2, 0 \leqq \phi \leqq \pi$ ويكون الراسم أحاديا فى هذه الحالة (شكل (٢٥)) .



التحويلة $w = z^2$.
شكل (٢٥)

بدلالة الاحداثيات الكارتيزية تكون التحويلة $w = z^2$ هى

$$u + iv = x^2 - y^2 + i2xy.$$

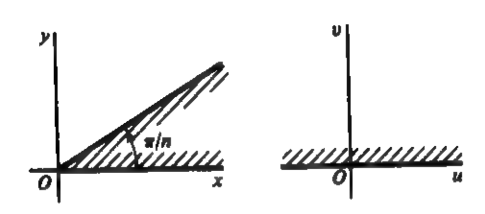
وبالتالى فإن صورة القطع الزائد $x^2 - y^2 = c_1 \ (c_1 \neq 0)$ تكون الخط المستقيم $u = c_1$ ، كما أن صورة القطع الزائد $2xy = c_2 \ (c_2 \neq 0)$ تكون الخط المستقيم $v = c_2$. وهذه القطاعات الزائدة سبق تمثيلها بيانيا بالباب الثانى (شكل (١٧)) .

من البديهى أن أى نقطتين غير صفريتين $z, -z$ يكون لهما دائماً نفس الصورة ، كما أن كل نقطة من نقط الخط المستقيم $u = c_1$ تكون صورة لمثل هاتين النقطتين فقط فى المستوى المركب z . وهاتان النقطتان تقعان على فرعين مختلفين للقطع الزائد $x^2 - y^2 = c_1$ من هذا ينتج أن النقط الواقعة على فرع معين للقطع الزائد تكون فى تناظر أحادى مع نقط الخط المستقيم $u = c_1$.

بالمثل ، الراسم الذى يرسم القطع الزائد $2xy = c_2$ فوق الخط المستقيم يكون راسما أحاديا يرسم كل فرع لهذا القطع فوق هذا الخط المستقيم .

ومن السهل الحصول على صور المناطق التى تحتوى حدودها مثل هذه القطاعات الزائدة . فمثلا ، لاحظ أن النطاق $x > 0, y > 0, xy < 1$ يتكون من جميع النقط الواقعة على الأفرع العليا من القطاعات الزائدة التى تنتمى للعائلة $xy = c$ حيث $0 < c < 1$. وبالتالى فإن صور هذا النطاق تتكون من جميع النقط الواقعة على الخطوط المستقيمة $v = 2c$. أى أن صورة النطاق المعطى هى الشريحة الأفقية $0 < v < 2$. عندما يكون n عدداً صحيحاً موجباً فإن التحويلة

$$w = z^n \quad \text{أو} \quad \rho e^{i\phi} = r^n e^{in\theta} \qquad (٢)$$



التحويلة $w = z^n$.
شكل (٢٦)

ترسم المنطقة $r \geqq 0, 0 \leqq \theta \leqq \pi/n$ فوق نصف المستوى العلوى $\rho \geqq 0, 0 \leqq \phi \leqq \pi$ (شكل (٢٦)).هذه التحويلة ترسم المستوى المركب z بأكمله فوق المستوى المركب w بأكمله ، حيث تكون كل نقطة غير صفرية فى المستوى المركب w صورة n من النقط المختلفة فى المستوى المركب z . والدائرة $r = r_0$ ترسم فوق الدائرة $\rho = r_0^n$ ، كما أن القوس $r = r_0, 0 \leqq \theta < 2\pi/n$ من الدائرة $r = r_0$ يرسم فوق الدائرة $\rho = r_0^n$ ويكون الراسم فى هذه الحالة أحاديا .

٣٦ - الدالة $z^{1/2}$

من بند (٦) نعلم أن قيم $z^{1/2}$ هما الجذران المربعان للعدد المركب z عندما $z \neq 0$. وقد رأينا فى بند (٢٨) أن هذه الدالة المتعددة القيم يمكن كتابتها أيضاً على الصورة

$$z^{1/2} = \exp\left(\tfrac{1}{2}\log z\right) \qquad (z \neq 0). \qquad (١)$$

إذا استخدمنا الاحداثيات القطبية وراعينا حقيقة أن $\log z = \text{Log}\, r + i(\Theta + 2k\pi)$ حيث $r = |z|, \Theta = \text{Arg}\, z$ ، $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ فإنه يمكننا كتابة معادلة (١) على الصورة

$$z^{1/2} = \sqrt{r}\exp\frac{i(\Theta + 2k\pi)}{2} \qquad (r > 0, k = 0, 1) \qquad (٢)$$

وحيث أن الدالة الأسية المركبة دورية ودورتها $2\pi i$ ، فإن (٢) تعطى قيمتى $z^{1/2}$ لكل عدد مركب غير صفرى z عندما $k = 1$, $k = 0$.

الفرع الأساسى F_0 للدالة المتعددة القيم $z^{1/2}$ هى الدالة التحليلية التى نحصل عليها من معادلة (١) وذلك باستخدام الفرع الأساسى للدالة log z . وبالتالى ، إذا وضعنا k = o فى المعادلة (٢) ، فإننا نجد أن

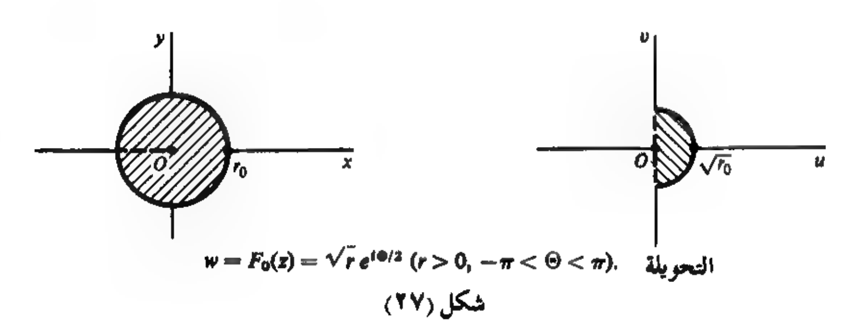
$$F_0(z) = \sqrt{r}\exp\frac{i\Theta}{2} \qquad (r > 0, -\pi < \Theta < \pi). \qquad (٣)$$

الشعاع $\Theta = \pi$ هو الفرع القاطع للدالة F_0 ، كما أن النقطة z = o هى نقطة التفرع . ويجب ملاحظة أن الطرف الأيمن من معادلة (٣) معرف للنقط الواقعة على الفرع القاطع للدالة F_0، إلا أن الدالة التى نحصل عليها فى هذه الحالة بتوسيع نطاق التعريف لا تكون حتى متصلة عند هذه النقط . وهذا يرجع إلى حقيقة أن هناك قيما للمتغير Θ قريبة جدا من π وكذلك قيما لنفس المتغير قريبة جدا من $-\pi$ فى أى جوار لنقطة على الجزء السالب من المحور الحقيقى .

التحويلة $w = F_0(z)$ ترسم النطاق $r > 0, -\pi < \Theta < \pi$ فوق نصف المستوى الأيمن $\rho > 0, -\pi/2 < \phi < \pi/2$ من المستوى المركب w، حيث $w = \rho e^{i\phi}$. كذلك فإن نفس هذه التحويلة ترسم النطاق $0 < r \leqq r_0, -\pi < \Theta < \pi$ فوق نصف القرص الدائرى $0 < \rho \leqq \sqrt{r_0}, -\pi/2 < \phi < \pi/2$ (شكل (٢٧)) حيث $\phi = \Theta/2$ ، $\rho = \sqrt{r}$.

عند وضع $k = 1$ فى المعادلة (٢) فإننا نحصل على الفرع

$$F_1(z) = \sqrt{r}\exp\frac{i(\Theta + 2\pi)}{2} \qquad (r > 0, -\pi < \Theta < \pi) \qquad (٤)$$



التحويلة $w = F_0(z) = \sqrt{r}\, e^{i\Theta/2} \ (r > 0, -\pi < \Theta < \pi).$

شكل (٢٧)

حيث أن $\exp(i\pi) = -1$ فإنه ينتج أن $F_1(z) = -F_0(z)$. وبالتالى فإن القيم $\pm F_0(z)$ تمثل جميع قيم $z^{1/2}$ لجميع نقط النطاق $r > 0, -\pi < \Theta < \pi$. إذا استخدمنا الصيغة (٣) لتوسيع نطاق تعريف F_0 ليشمل الشعاع $\Theta = \pi$ وإذا كتبنا $F_0(0) = 0$ فإن القيم $\pm F_0(z)$ تمثل فى هذه الحالة جميع قيم $z^{1/2}$ على المستوى المركب z بأكمله .

ومن الممكن الحصول على أفرع أخرى للدالة $z^{1/2}$ وذلك باستخدام أفرع أخرى متباينة للدالة $\log z$ فى الصيغة (١) . فمثلا الفرع الذى فرعه القاطع هو الشعاع $\theta = \alpha$ يعطى بالعلاقة

$$f_\alpha(z) = \sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2} \qquad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi). \qquad (٥)$$

ويجب ملاحظة أنه عندما تكون $\alpha = -\pi$ فإننا نحصل على الفرع $F_0(z)$ وعندما تكون $\alpha = \pi$ فإننا نحصل على الفرع $F_1(z)$. كما فى حالتى F_0, F_1 فإنه يمكننا توسيع نطاق تعريف f_α ليشمل المستوى المركب بأكمله وذلك باستخدام الصيغة (٥) لتعريف f_α عند النقط الغير صفرية على الفرع القاطع وكتابة $f_\alpha(0) = 0$ ولكن يجب ملاحظة أن الدوال التى نحصل عليها بتوسيع نطاق التعريف كما هو مذكور أعلاه لا تكون بالطبع متصلة فى المستوى المركب بأكمله .

من المفيد أحياناً أن نتذكر أنه إذا كان $w = f_\alpha(z)$ فإن $z = w^2$. فمثلا ، من المعلوم (بند (٣٥)) أن الدالة $w = z^2$ تمثل راسما أحاديا من فرع القطع الزائد $2xy = 1$ الواقع فى الربع الأول من المستوى المركب z فوق الخط المستقيم $v = 1$ فى المستوى المركب w . وبالتالى فإذا ما أبدلنا المستويين المركبين z,w كل مكان الآخر فإننا نجد أن الفرع f_0 ، للفرع القاطع $\theta = 0$ ، يكون راسما أحاديا من الخط المستقيم $y = 1$ فى المستوى المركب z فوق فرع القطع الزائد $2uv = 1$ الواقع فى الربع الأول من المستوى المركب w.

٣٧ – دوال أخرى غير قياسية Other Irrational Functions

نفرض أن n أى عدد صحيح موجب أكبر من الواحد . القيم $z^{1/n}$ هى الجذور النونية للعدد المركب z عندما $z \neq 0$ ، ومن بند (٢٨) نعلم أن الدالة المتعددة القيم $z^{1/n}$ يمكن كتابتها على الصورة

$$z^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\log z\right) \qquad (z \neq 0).$$

حيث أن $\log z = \operatorname{Log} r + i(\Theta + 2k\pi)$ ، حيث $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, r = |z|, \Theta = \operatorname{Arg} z$ فإننا نجد أن

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{r}\exp\frac{i(\Theta + 2k\pi)}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \qquad (١)$$

وقد تعرضنا فى البند السابق للحالة التى فيها $n = 2$. فى الحالة العامة ، نجد أن كل داله من الدوال

$$F_k(z) = \sqrt[n]{r}\exp\frac{i(\Theta + 2k\pi)}{n} \qquad (٢)$$

$$(r > 0, -\pi < \Theta < \pi, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

التى عددها n تكون فرعا للدالة $z^{1/n}$. التحويلة $w = F_k(z)$ تكون راسما أحاديا من النطاق $r > 0, -\pi < \Theta < \pi$ فوق النطاق $\rho > 0,\ (2k-1)\pi/n < \phi < (2k+1)\pi/n$، حيث $w = \rho e^{i\phi}$.
هذه الأفرع (عددها n) للدالة $z^{1/n}$ تعطى الجذور النونية المختلفة لأى عدد مركب z ينتمى للنطاق $r > 0,\ -\pi < \Theta < \pi$. ونحصل على الفرع الأساسى لهذه الدالة بوضع $k = 0$، والأفرع الأخرى التى على شاكلة (٥) بالبند السابق يمكن الحصول عليها بسهولة .
ويمكن الحصول على أفرع الدالة $(z - z_0)^{1/2}$ الثنائية القيمة إذا ما لاحظنا أنها تحصيل الانتقال $Z = z - z_0$ والدالة $Z^{1/2}$ الثنائية القيمة . وكل فرع للدالة $Z^{1/2}$ ينتج عنه فرع للدالة $(z - z_0)^{1/2}$. وللحصول على صيغ لأفرع الدالة $(z - z_0)^{1/2}$ فإننا نكتب $\theta_0 = \arg(z - z_0)$، $r_0 = |z - z_0|$ بالإضافة إلى $\Theta_0 = \text{Arg}(z - z_0)$. فمثلا فرعين من أفرع الدالة هما

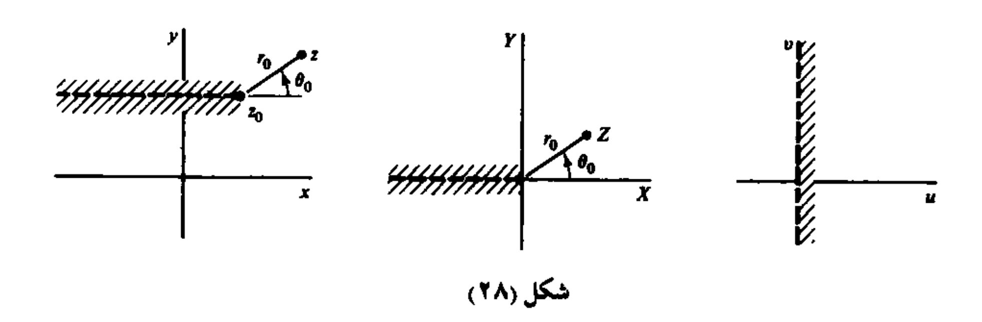
$$G_0(z) = \sqrt{r_0}\exp\frac{i\Theta_0}{2} \qquad (r_0 > 0,\ -\pi < \Theta_0 < \pi) \tag{٣}$$

و

$$g_0(z) = \sqrt{r_0}\exp\frac{i\theta_0}{2} \qquad (r_0 > 0,\ 0 < \theta_0 < 2\pi). \tag{٤}$$

ويجب ملاحظة أن فرع الدالة $Z^{1/2}$ الذى استخدم فى كتابة صيغة $G_0(z)$ معرف لجميع نقط المستوى المركب Z فيما عدا نقطة الأصل ونقط الشعاع $\text{Arg}\, Z = \pi$. وبالتالى فإن التحويلة $w = G_0(z)$ تكون راسما أحاديا من النطاق $|z - z_0| > 0,\ -\pi < \text{Arg}(z - z_0) < \pi$ فوق نصف المستوى الأيمن $\text{Re}\, w > 0$ للمستوى المركب w (شكل (٢٨)) . كما أن التحويلة $w = g_0(z)$ تمثل راسما أحاديا من النطاق $|z - z_0| > 0, 0 < \arg(z - z_0) < 2\pi$ فوق نصف المستوى العلوى $\text{Im}\, w > 0$ للمستوى المركب w .
وكمثال توضيحى، ولو أنه ليس بمثال أبسط ، سنعتبر الآن الدالة $(z^2 - 1)^{1/2}$ الثنائية القيمة . باستخدام خواص اللوغاريتمات التى سبق الحصول عليها ، يمكننا أن نكتب

$$(z^2 - 1)^{1/2} = \exp\left[\tfrac{1}{2}\log(z^2 - 1)\right] = \exp\left[\tfrac{1}{2}\log(z - 1) + \tfrac{1}{2}\log(z + 1)\right] \tag{٥}$$
$$= (z - 1)^{1/2}(z + 1)^{1/2} \qquad (z \neq \pm 1).$$



شكل (٢٨)

فإذا كان $f_1(z)$ فرعا للدالة $(z-1)^{1/2}$ معرف على نطاق ما D_1 ،وكان $f_2(z)$ فرعا للدالة $(z+1)^{1/2}$ معرف على نطاق ما D_2 ، فإن حاصل الضرب $f_1(z)f_2(z)$ يكون فرعا للدالة $(z^2-1)^{1/2}$ معرف عند جميع النقط التى تنتمى لكلا النطاقين D_1, D_2 (أى النقط التى تنتمى إلى $D_1 \cap D_2$) .

وللحصول على فرع محدد للدالة $(z^2-1)^{1/2}$ فإننا نستخدم فرع الدالة $(z-1)^{1/2}$ وفرع الدالة $(z+1)^{1/2}$ المعطيان بالمعادلة (٤) . إذا كتبنا $\theta_1 = \arg(z-1)$ ، $r_1 = |z-1|$ فإن فرع الدالة $(z-1)^{1/2}$ المطلوب يكون

$$\sqrt{r_1}\exp\frac{i\theta_1}{2} \qquad r_1 > 0 \quad و \quad 0 < \theta_1 < 2\pi).$$

بالمثل فرع الدالة $(z+1)^{1/2}$ المعطى بالمعادلة (٤) يكون

$$\sqrt{r_2}\exp\frac{i\theta_2}{2} \qquad r_2 > 0 \quad و \quad 0 < \theta_2 < 2\pi$$

حيث $\theta_2 = \arg(z+1)$ ، $r_2 = |z+1|$.وحاصل ضرب هذين الفرعين هو إذن الفرع f للدالة $(z^2-1)^{1/2}$ المعرف بالمعادلة

$$f(z) = \sqrt{r_1 r_2}\exp\frac{i(\theta_1+\theta_2)}{2} \quad (r_1 > 0, r_2 > 0, 0 < \theta_k < 2\pi, k = 1, 2). \tag{٦}$$

وكما هو موضح بشكل (٢٩) ، فإن الفرع f يكون معرفا لجميع نقط المستوى المركب z عدا نقط الشعاع $x \geqq -1, y = 0$.

من الممكن أن نوسع نطاق تعريف الفرع f للدالة $(z^2-1)^{1/2}$ المعطى بالمعادلة (٦) ، لنحصل على الدالة

$$F(z) = \sqrt{r_1 r_2}\exp\frac{i(\theta_1+\theta_2)}{2}$$

$$(r_1 > 0, r_2 > 0, r_1 + r_2 > 2, 0 \leqq \theta_k < 2\pi, k = 1, 2), \tag{٧}$$

وهذه الدالة تكون تحليلية عند جميع نقط المستوى المركب z عدا نقط القطعة المستقيمة $-1 \leqq x \leqq 1, y = 0$.حيث أن $F(z) = f(z)$ لجميع النقط z التي تنتمى إلى نطاق تعريف F عدا نقط الشعاع $x > 1, y = 0$ فإنه يكفى فقط أن نبين أن F تحليلية عند جميع نقط هذا الشعاع . ولتحقيق ذلك فإننا سنقوم بإجراء حاصل ضرب فرعى الدالتين $(z+1)^{1/2}$ ، $(z-1)^{1/2}$ المعطيان بالمعادلة (٣) . أى أننا سنعتبر الدالة

$$G(z) = \left(\sqrt{r_1}\exp\frac{i\Theta_1}{2}\right)\left(\sqrt{r_2}\exp\frac{i\Theta_2}{2}\right)$$

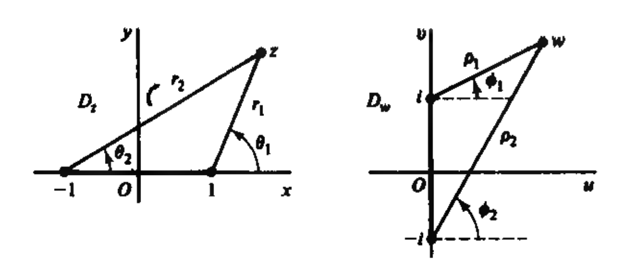
$$(r_1 > 0, r_2 > 0, -\pi < \Theta_k < \pi, k = 1, 2),$$

شكل (٢٩)

حيث $\Theta_2 = \text{Arg}\,(z+1)$ ، $\Theta_1 = \text{Arg}\,(z-1)$ ، $r_2 = |z+1|$ ، $r_1 = |z-1|$. ويجب ملاحظة أن الدالة G تكون تحليلية عند جميع نقط المستوى المركب z فيما عدا نقط الشعاع $y = 0$, $x \leqq 1$. والآن ، $F(z) = G(z)$ لجميع النقط z الواقعة أعلى أو على الشعاع $y = 0$, $x > 1$ ، لأن فى هذه الحالة يكون $\theta_k = \Theta_k$ ، $(k = 1, 2)$. وعندما تقع z أسفل هذا الشعاع يكون $\theta_k = \Theta_k + 2\pi$ ، $(k = 1, 2)$ وبالتالى فإن $\exp\,(i\theta_k/2) = -\exp\,(i\Theta_k/2)$ ونحصل مرة أخرى على أن $F(z) = G(z)$. حيث أن $F(z) = G(z)$ فى نطاق يحوى الشعاع $y = 0$, $x > 1$ وحيث أن $G(z)$ تحليلية فى هذا النطاق فإنه ينتج أن $F(z)$ تكون تحليلية فى هذا النطاق . وبالتالى فإن $F(z)$ تكون تحليلية عند جميع النقط فى المستوى المركب z فيما عدا النقط القطعة المستقيمة $-1 \leqq x \leqq 1, y = 0$

الدالة F المعرفة بالمعادلة (٧) لا يمكن توسيع نطاق تعريفها للحصول على دالة تحليلية عند نقط على القطعة المستقيمة $-1 \leqq x \leqq 1, y = 0$.وهذا راجع إلى أن قيمة الطرف الأيمن من المعادلة (٧) تقفز من $i\sqrt{r_1 r_2}$ إلى أعداد قريبة من $-i\sqrt{r_1 r_2}$ وذلك عندما تتحرك النقطة z عبر هذه القطعة المستقيمة إلى أسفل وبالتالى فإن الدالة التى نحصل عليها فى هذه الحالة لا تكون حتى متصلة فى هذا النطاق .

التحويلة $w = F(z)$ تكون راسما أحاديا من النطاق D_z المكون من جميع نقط المستوى المركب z عدا نقط القطعة المستقيمة $-1 \leqq x \leqq 1, y = 0$ فوق النطاق D_w المكون من المستوى المركب w بأكمله عدا نقط القطعة المستقيمة $u = 0, -1 \leqq v \leqq 1$ (شكل (٣٠)).



شكل (٣٠)

ولكن قبل أن نبين هذا نلفت النظر إلى أنه إذا كانت

$r_1 = r_2 > 1$ ، $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ ، $y > 0$ ، $z = iy$

فإن الجزء الموجب من محور الصادات يرسم فوق جزء محور الاحداثيات v بحيث $v > 1$ بالإضافة إلى ذلك فإن الجزء السالب من محور الصادات يرسم فوق جزء محور الاحداثيات v بحيث $v < -1$. وكل نقطة فى النصف العلوى $y > 0$ من النطاق D_Z ترسم إلى نقطة فى نصف المستوى $v > 0$ من المستوى المركب w ، كما أن كل نقطة فى النصف السفلى $y < 0$ من النطاق D_Z ترسم إلى نقطة فى نصف المستوى $v < 0$ من المستوى المركب w . الشعاع $x > 1, y = 0$ يرسم فوق الجزء الموجب من المحور الحقيقى للمستوى المركب w ، والشعاع $x < -1, y = 0$ يرسم فوق الجزء السالب من المحور الحقيقى للمستوى المركب w . لإثبات أن التحويلة $w = F(z)$ تكون أحادية ، نلاحظ أنه إذا كان $F(z_1) = F(z_2)$ فإن $z_1^2 - 1 = z_2^2 - 1$.من هذا ينتج أن $z_1 = z_2$ أو $z_1 = -z_2$.ولكن من المستحيل أن يكون $z_1 = -z_2$ بسبب الطريقة التى ترسم بها F كلا من النصف العلوى والنصف السفلى من النطاق D_Z كذلك أجزاء المحور الحقيقى الواقعة فى D_Z . إذن ، إذا كان $F(z_1) = F(z_2)$ فإن $z_1 = z_2$. وبالتالى فإن F تكون أحادية .

سنبين الآن أن f ترسم النطاق D_Z فوق النطاق D_W وذلك بإيجاد دالة H ترسم D_W إلى D_Z بحيث أنه إذا كان $z = H(w)$ فإن $w = F(z)$. وهذا سيثبت أنه لكل نقطة w فى D_W يوجد نقطة z فى D_Z بحيث $F(z) = w$ ، وبالتالى يكون F راسما فوقيا . الراسم H الذى حصلنا عليه هو معكوس الراسم F .

ولإيجاد H ، فإننا نلاحظ أولا أنه إذا كانت w إحدى قيم $(z^2 - 1)^{1/2}$ لعدد معين z ، فإن z تكون قيمة من قيم $(w^2 + 1)^{1/2}$ لهذا العدد w . الدالة H ستكون بالتالى فرعا للدالة المتعددة القيم

$$(w^2 + 1)^{1/2} = (w - i)^{1/2}(w + i)^{1/2}.$$

باتباع نفس الأسلوب الذى اتبعناه للحصول على الفرع F(z) للدالة $(z^2 - 1)^{1/2}$، فإننا نكتب $w - i = \rho_1 \exp(i\phi_1)$ ، $w + i = \rho_2 \exp(i\phi_2)$ الدالة H تكون إذن

$$H(w) = \sqrt{\rho_1\rho_2} \exp \frac{i(\phi_1 + \phi_2)}{2}, \qquad (٨)$$

$$(\ \rho_1 > 0,\ \rho_2 > 0, \rho_1 + \rho_2 > 2\ , -\pi/2 \leqq \phi_k < 3\pi/2, k = 1, 2,\ )$$

ويكون نطاق تعريف H هو D_W . هذا الفرع يرسم نقط D_W الواقعة أعلى أو أسفل محور الاحداثيات u فوق نقط أعلى أو أسفل محور الاحداثيات x على الترتيب . كذلك فإنها ترسم الجزء الموجب من محور الاحداثيات u إلى الجزء الموجب من محور الاحداثيات x بحيث $x > 1$ الجزء السالب من محور الاحداثيات u إلى الجزء السالب من محور الاحداثيات x بحيث $x < -1$. إذا كان $z = H(w)$ فإن $z^2 = w^2 + 1$ وبالتالى فإن $w^2 = z^2 - 1$. حيث

أن z تنتمى إلى D_Z وحيث أن $F(z), -F(z)$ هما قيمتا $(z^2-1)^{1/2}$ لنقطة ما z فى النطاق D_Z فإنه ينتج أن $w=-F(z)$ أو $w=F(z)$. ولكن من الواضح ، من أسلوب رسم كل من F و H لكل من النصف العلوى والنصف السفلى من نطاق تعريفهما بما فى ذلك أجزاء ماقين ، أن $w=F(z)$ •

أخيرا يجدر بنا التنويه إلى أن أفرع الدوال الثنائية القيمة

$$w=(z^2+Az+B)^{1/2}=[(z-z_0)^2-z_1{}^2]^{1/2} \qquad (z_1\neq 0) \qquad (٩)$$

حيث $B=z_0{}^2-z_1{}^2$ ، $A=-2z_0$ ، والرسم بهذه الأفرع ، يمكن معالجته بمعاونة النتائج التى حصلنا عليها بالنسبة للدالة F السالفة الذكر والتحويلات المتتابعة

$$Z=\frac{z-z_0}{z_1}, \qquad W=(Z^2-1)^{1/2}, \qquad w=z_1W. \qquad (١٠)$$

تماريـــن

١ - صف النطاق الذى يرسم فوقه القطاع الدائرى $r<1, 0<\theta<\pi/4$ بالتحويلة :
(أ) $w=z^2$ (ب) $w=z^3$ (جـ) $w=z^4$.

٢ - اثبت أن التحويلة $w=z^2$ تمثل راسما أحاديا من الخطوط $x=c$ $(c\neq 0)$ فوق القطاعات المكافئة $v^2=-4c^2(u-c^2)$ ومن الخطوط $y=d$ $(d\neq 0)$ فوق القطاعات المكافئة $v^2=4d^2(u+d^2)$ لاحظ أن بؤر جميع هذه القطاعات المكافئة تقع عند النقطة $w=0$

٣ - أوجد منطقة فى المستوى المركب z تكون صورتها بالتحويلة $w=z^2$ هى النطاق المحدد بالمستطيل الواقع فى المستوى المركب w والذى حدوده تقع على المستقيمات $u=1,\ u=2,\ v=1,\ v=2$•

٤ - إثبت أن الفرع الأساسى للدالة $z^{1/2}$ يرسم النطاق المحدد بمحور الصادات والقطع المكافىء $y^2=-4(x-1)$ فوق النطاق المثلثى المحدد بالخطوط المستقيمة $v=u, v=-u, u=1.$ بين الأجزاء المناظرة لحدود المنطقتين . انظر تمرين (٢).

٥ - اثبت أن الفرع $w=\sqrt{r}\exp(i\theta/2)$ ، حيث $r>0,\ 0<\theta<2\pi.$ ، للدالة المتعددة القيم $z^{1/2}$ يكون راسما أحاديا للنطاق الواقع بين القطعين المكافئين

$$r=\frac{2a^2}{1-\cos\theta}, \qquad r=\frac{2b^2}{1-\cos\theta}$$

فوق الشريحة $a<v<b$ حيث $b>a>0$ • أنظر تمرين (٢).

٦ - عين صورة النطاق $r>0, -\pi<\theta<\pi$ فى المستوى المركب z بكل من التحويلات المعرفة بالأفرع الأربعة للدالة $z^{1/4}$ والمعطاة بالمعادلة (٢) من بند (٣٧) عندما $n=4$. استخدم هذه الأفرع الأربعة للدالة $z^{1/4}$ لتعيين الجذور الأربع للمقدار i .

٧ - فى بند (٣٧) عرفنا الفرع F للدالة $(z^2-1)^{1/2}$ بدلالة الاحداثيات $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ وضح هندسيا لماذا تعين الشروط $r_1>0, 0<\theta_1+\theta_2<\pi$ الربع الأول $x>0, y>0$ من المستوى المركب z. ثم بين أن التحويلة $w=F(z)$ ترسم هذا لربع من المستوى المركب z فوق الربع الأول $u>0, v>0$ من المستوى المركب w .

اقتراح : لإثبات أن الربع الأول $x>0, y>0$ من المستوى المركب z يعين تماماً بالشروط المعطاة لاحظ أن $\theta_1+\theta_2=\pi$ عند كل نقطة تنتمى للجزء الموجب من محور الصادات وأن $\theta_1+\theta_2$ تقل كلما تحركت النقطة z إلى اليمين على امتداد الشعاع $\theta_2=c\,(0<c<\pi/2)$

٨ - إذا كانت $w=F(z)$ هى التحويلة من الربع الأول للمستوى المركب z فوق الربع الأول للمستوى المركب w (تمرين (٧)) فإثبت أن

$$u=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r_1r_2+x^2-y^2-1},\qquad v=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r_1r_2-x^2+y^2+1},$$

حيث $r_1^2r_2^2=(x^2+y^2+1)^2-4x^2$ ، وأن صورة جزء القطع الزائد $x^2-y^2=1$ الواقع فى الربع الأول هى الشعاع $u>0, v=u$.

٩ - فى تمرين (٨) إثبت أن النطاق D الواقع تحت القطع الزائد فى الربع الأول للمستوى المركب z يتعين بالشروط $r_1>0, 0<\theta_1+\theta_2<\pi/2$. ثم إثبت أن صورة النطاق D هى الثمن $0<v<u$ من المستوى المركب w . عين بيانيا النطاق D وصورته .

١٠ - نفرض أن F هو فرع الدالة $(z^2-1)^{1/2}$ المعرف فى بند (٣٧) ، وأن $z_0=r_0\exp(i\theta_0)$ نقطة ما ثابتة ، حيث $r_0>0$ ، $0\leqq\theta_0<2\pi$. إثبت أن الفرع F_0 للدالة $(z^2-z_0^2)^{1/2}$ الذى فرعه القاطع هو القطعة المستقيمة التى نقطتها نهايتيها $z_0, -z_0$ ، يعطى بالعلاقة $F_0(z)=z_0F(Z)$ حيث $Z=z/z_0$.

١١ - اكتب $z+1=r_2\exp(i\Theta_2)$ ، $z-1=r_1\exp(i\theta_1)$ حيث $-\pi<\Theta_2<\pi$ ، $0<\theta_1<2\pi$ ، وذلك لتعيين فرع لكل من الدوال

(أ) $(z^2-1)^{1/2}$ ؛ (ب) $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2}$

فى كل حالة لابد وأن يتكون الفرع القاطع من الشعاعين $\Theta_2=\pi$ ، $\theta_1=0$

١٢ - باستخدام المصطلحات ببند (٣٧) اثبت أن الدالة

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\exp\frac{i(\theta_1-\theta_2)}{2}$$

تكون فرع له نفس نطاق التعريف D_z وله نفس الفرع القاطع للدالة F . اثبت أن هذه التحويلة ترسم D_z فوق نصف المستوى الأيمن $\rho>0, -\pi/2<\phi<\pi/2$ ، حيث

النقطة $w=1$ هى صورة النقطة $z=\infty$ اثبت أن التحويلة العكسية هى

$$z=\frac{1+w^2}{1-w^2} \qquad (u>0).$$

١٣ – اثبت أن التحويلة المعطاة فى تمرين (١٢) ترسم جزء خارجية الدائرة $|z|=1$ الواقع فى النصف العلوى من المستوى المركب z فوق المنطقة فى الربع الأول من المستوى المركب w الواقعة بين الخط المستقيم $v=u$ ومحور الاحداثيات u .
ارسم هذه المناطق .

١٤ – اكتب $z=r\exp(i\Theta),\ z-1=r_1\exp(i\Theta_1),\ z+1=r_2\exp(i\Theta_2)$، حيث قيم جميع الزوايا الثلاث تقع بين π , $-\pi$ ، و أوجد فرع الدالة $[z(z^2-1)]^{1/2}$ الذى يتكون فرعه القاطع من القطعتين المستقيمتين $x\leqq -1, y=0$ ، $0\leqq x\leqq 1, y=0$ من محور السينات .

٣٨ – التحويلة $w = \exp z$

التحويلة

$$w=e^z,$$

أو $\rho e^{i\phi}=e^x e^{iy}$ ، حيث $w=\rho\exp(i\phi),\ z=x+iy$، يمكن كتابتها

$$\rho=e^x, \qquad \phi=y.$$

هذه التحويلة تكون راسما أحاديا من الخط المستقيم $y=c$ فوق الشعاع $\phi=c$ مع استبعاد نقطة الأصل من الشعاع . الخط المستقيم $x=c$ يرسم فوق الدائرة $\rho=e^c$.ولكن يجب ملاحظة أنه يوجد عدد لا نهائى من نقط الخط المستقيم $x=c$ التى لها نفس الصورة .

المنطقة $a\leqq x\leqq b,\ c\leqq y\leqq d$ (أى داخلية وحد المستطيل $x=a, x=b, y=c, y=d$) ترسم فوق المنطقة

$$e^a\leqq\rho\leqq e^b \quad , \quad c\leqq\phi\leqq d$$

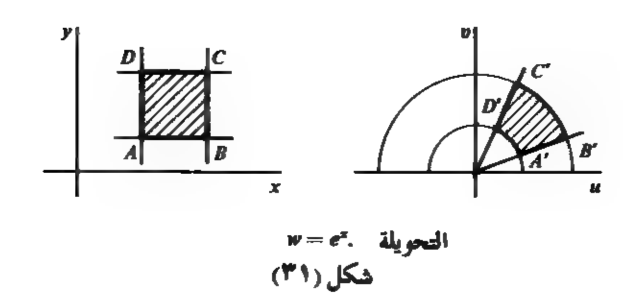
المحدودة بأجزاء من دوائر وأشعة . وهذا الراسم يكون أحاديا إذا كان $d-c<2\pi$. شكل (٣١) يوضح هاتين المنطقتين والأجزاء المتناظرة من حدودهما . فعلى وجه الخصوص ، إذا كان $d=\pi$ ، $c=0$ فإن $0\leqq y\leqq\pi$ وفى هذه الحالة يرسم المستطيل فوق نصف حلقة دائرية كما هو موضح بشكل (٨) ملحق (٢). من بند (٢٢) نعلم أن التحويلة $w=e^z$ تكون راسما أحاديا من الشريحة $(2n-1)\pi<y\leqq(2n+1)\pi$ حيث n أى عدد صحيح ، فوق فئة الأعداد الغير صفرية فى المستوى المركب w . نعلم

كذلك من بند (٢٦) أنه إذا كانت z منتمية للشريحة السالفة الذكر وكان $w = e^z$ فإن

$$z = \text{Log}\, w + 2n\pi i.$$

الشريحة اللانهائية $0 < y < \pi$ ترسم فوق نصف المستوى العلوى $\rho > 0, 0 < \phi < \pi$ من المستوى المركب w . وشكل (٦) من ملحق (٢) يبين الأجزاء المتناظرة لحدود المنطقتين . وهذا الراسم لشريحة فوق نصف مستوى مفيد بصورة خاصة فى التطبيقات .

الشريحة النصف لا نهائية $x \leqq 0, 0 \leqq y \leqq \pi$ ترسم فوق المنطقة النصف دائرية $0 < \rho \leqq 1, 0 \leqq \phi \leqq \pi$ (شكل (٧) ملحق (٢)). لاحظ أن النقطة $w = o$ ليست متضمنة فى صورة المنطقة وذلك لأن e^z لا تنعدم إطلاقا .



التحويلة $w = e^z$.
شكل (٣١)

٣٩ – التحويلة $w = \sin z$

حيث أن

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

فإنه يمكن كتابة التحويلة $w = \sin z$ على الصورة

$$u = \sin x \cosh y, \qquad v = \cos x \sinh y. \tag{١}$$

التحويلة $w = \sin z$ تكون راسما أحاديا من الشريحة

$$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, \qquad y \geqq 0$$

فى المستوى المركب z فوق النصف العلوى $v \geqq 0$ من المستوى المركب w وهذا يبين الأهمية الخاصة لهذه التحويلة فى التطبيقات (هذه الشريحة وصورتها موضحتين بشكل (٩) من ملحق (٢)) . وسنقوم الآن بتحقيق ذلك باعتبار صور الخطوط المستقيمة الرأسية $x = c$ ، حيث $-\pi/2 \leqq c \leqq \pi/2$.

فمحور الصادات $(x = o)$ يرسم فوق محور الاحداثيات v $(u = 0)$ ويكون الراسم فى هذه الحالة أحاديا . ويجب ملاحظة أن الأجزاء العليا من هذه المحاور تكون متناظرة

وكذلك الأجزاء السفلى منها . فمثلا صورة النقطة (o,y) على محور الصادات هى النقطة $(0, \sinh y)$ على محور الاحداثيات v.

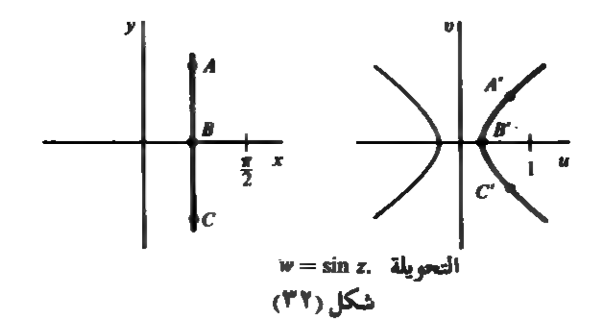
إذا كان $0 < c < \pi/2$ ، فإن الخط المستقيم $x = c$ يرسم فوق المنحنى

$$u = \sin c \cosh y, \qquad v = \cos c \sinh y \tag{٢}$$

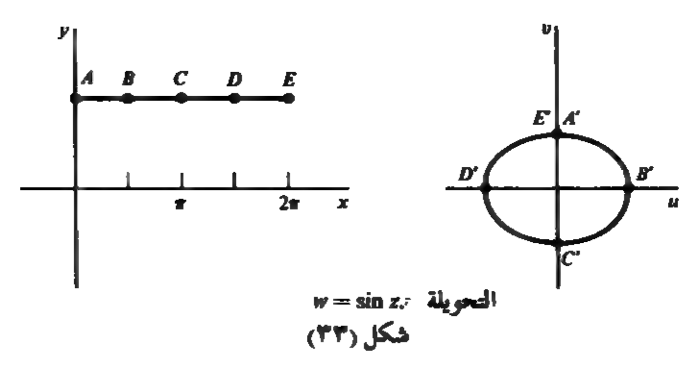
ويكون الراسم فى هذه الحالة أحاديا . ويجب ملاحظة أن المنحنى (٢) هو الفرع الأيمن من القطع الزائد

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1 \tag{٣}$$

حيث بؤرتيه هما $(\pm 1,0)$.أنظر شكل (٣٢) .



التحويلة $w = \sin z.$
شكل (٣٢)



التحويلة $w = \sin z.$
شكل (٣٣)

صورة الخط المستقيم $x = \pi/2$ ، التى نحصل عليها بوضع $x = \pi/2$ فى المعادلات (١) ، تتكون من النقط (u,o) الواقعة على محور الاحداثيات u بحيث $u \geqq 1$. ويجب ملاحظة أن الراسم الناتج بقصر نطاق التعريف على الخط المستقيم $x = \pi/2$ لا يكون فى هذه الحالة أحاديا وذلك حيث أن النقطتين $\pi/2 - iy$ ،$\pi/2 + iy$ لهما نفس الصورة. ولكن الراسم يكون أحاديا إذا ما قصر نطاق تعريفه على النصف العلوى أو النصف السفلى لهذا الخط المستقيم .

ويمكن بسهولة الحصول على صورة الخط المستقيم $x = c$ ، حيث $-\pi/2 \leqq c < 0$ ، من

النتائج التى حصلنا عليها من القطع الزائد (٣) ، فيما عدا عندما $c = -\pi/2$.فى هذه الحالة الأخيرة تكون صورة الخط المستقيم مكونة من النقط (u,o) حيث $u \leqq -1$.

إذا اعتبرنا صور الأنصاف العليا فقط من جميع هذه الخطوط المستقيمة سيكون من الواضح أن التحويلة w = sin z تكون تناظرا أحاديا من نصف الشريحة اللانهائية $-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2, y \geqq 0$ فوق النصف العلوى $v \geqq 0$ من المستوى المركب w . وكما هو الأول من بشكل (١٠) من ملحق (٢) فإن النصف الأيمن من الشريحة يرسم فوق الربع موضح المستوى المركب w .

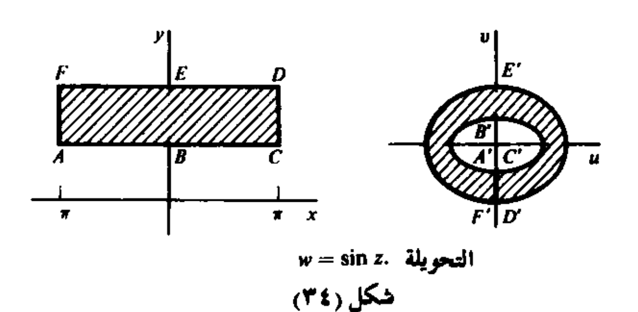
التحويلة w = sin z ترسم الخط المستقيم الأفقى y = c فوق المنحنى

$$u = \sin x \cosh c, \qquad v = \cos x \sinh c. \tag{٤}$$

إذا كان $c \neq 0$ فإن هذا المنحنى يكون القطع الناقص

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1. \tag{٥}$$

التحويلة w = sin z تكون تناظرا أحاديا من القطعة المستقيمة $0 \leqq x \leqq \pi, y = c$ فوق النصف الأيمن من هذا القطع الناقص ، كما أنها تكون تناظرا أحاديا من القطعة المستقيمة $\pi \leqq x \leqq 2\pi, y = c$ فوق النصف الأيسر من نفس القطع الناقص ، أنظر شكل (٣٣) . صورة محور السينات ، والتى نحصل عليها بوضع c = o فى المعادلات (٤) ، تكون جزء محور الاحداثيات u بحيث $-1 \leqq u \leqq 1$.



التحويلة $w = \sin z.$

شكل (٣٤)

المنطقة المستطيلة $-\pi \leqq x \leqq \pi,\ c_1 \leqq y \leqq c_2$ ترسم فوق المنطقة التى حدودها هى حدود القطعين الناقصين المتحدى البؤر (هذه المنطقة تسمى حلقة ناقصية **Elliptic Ring**) كما هو موضح بشكل (٣٤) . كل من الضلعين $x = \pm\pi,\ c_1 \leqq y \leqq c_2$ يرسم فوق القطعة المستقيمة $u = 0, -\sinh c_2 \leqq v \leqq -\sinh c_1$ ،فإذا كانت $c_1 > 0$ فإن صورة المنطقة المستطيلة تكون الحلقة الناقصية بالإضافة إلى القطعة المستقيمة $u = 0, -\sinh c_2 \leqq v \leqq -\sinh c_1$ التى تقع على الجزء السالب من محور الاحداثيات v

(هذه القطعة تسمى قاطع Cut). فعندما تتحرك نقطة z على حدود المنطقة المستطيلة فإن صورتها تدور حول أحد القطعين الناقصين ثم تتحرك على امتداد القاطع وبعد ذلك تدور حول القطع الناقص الثانى وفى النهاية تتحرك مرة أخرى على امتداد القاطع لتعود لنقطة البداية .

التحويلة $w = \sin z$ تكون تناظرا أحاديا من المنطقة المستطيلة $-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2,\ 0 \leqq y \leqq c$ فوق المنطقة النصف ناقصية **Semielliptic Region** كما هو موضح بشكل (١١) من ملحق (٢) .

٤٠ – التحويلات المتتابعة **Successive Transformations**

حيث أن $\cos z = \sin(z + \pi/2)$ ، فإن التحويلة

$$w = \cos z$$

هى محصلة التحويلتين $Z = z + \frac{\pi}{2}$ و $w = \sin Z$ بهذا الترتيب

أى أن التحويلة $w = \cos z$ تكافىء تحصيل التحويلة بدالة الجيب مسبوقة بانتقال إلى اليمين مقياسه $\pi/2$.

التحويلة

$$w = \sinh z$$

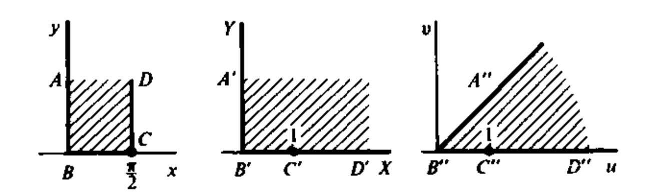
يمكن كتابتها على الصورة $w = -i \sin(iz)$ ، أو

$$Z = iz, \qquad W = \sin Z, \qquad w = -iW.$$

وبالتالى فإنها تكون تحصيل التحويلة بدالة الجيب مع نصفى دورتين (نصف الدورة هى دوران مقياسه $\pi/2$) . التحويلة

$$w = \cosh z$$

يمكن معاملتها بالمثل والنظر إليها على أنها أساسا تحويل بدالة جيب التمام .



التحويلة $w = (\sin z)^{1/2}$

شكل (٣٥)

التحويلة

$$w = (\sin z)^{1/2},$$

حيث الأس الكسرى يشير دائماً إلى الفرع الأساسى ، يمكن التعبير عنها على أنها تحصيل التحويلتين

$$w = Z^{1/2}, \quad و \quad Z = \sin z,$$

وكما نوهنا فى البند السابق فإن التحويلة الأولى ترسم الشريحة النصف لا نهائية $0 \leqq x \leqq \pi/2,\ y \geqq 0$ فوق الربع الأول $X \geqq 0,\ Y \geqq 0$ من المستوى المركب Z ، والتحويلة الثانية ترسم الربع المذكور إلى ثمن من المستوى المركب w وهذه التحويلات المتتابعة موضحة بشكل (٣٥) .

وكتوضيح آخر لفكرة التحويلات المتتابعة ، اعتبر أولا التحويلة الخطية الكسرية

$$Z = \frac{z-1}{z+1}.$$

لقد سبق لنا أن بينا أن هذه التحويلة ترسم نصف المستوى $y > 0$ فوق نصف المستوى $Y > 0$ للمستوى المركب Z . بعد ذلك لاحظ أن التحويلة $w = \text{Log}\, Z$ ترسم نصف المستوى $Y > 0$ فوق الشريحة $0 < v < \pi$ فى المستوى المركب w . من هذا نستنتج أن التحويلة

$$w = \text{Log}\frac{z-1}{z+1}$$

ترسم نصف المستوى $y > 0$ فوق الشريحة $0 < v < \pi$.ويوضح شكل (١٩) بملحق (٢) النقط المتناظرة على الحدود .

٤١ – جدول تحويلات المناطق Table of Transformations of Regions

ملحق (٢) يشتمل على عدة أشكال توضح تحويلات لبعض المناطق البسيطة والمفيدة بواسطة دوال بسيطة مختلفة . وفى كل حالة يوجد تناظر أحادى بين النقط الداخلية للمنطقة المعطاة والنقط الداخلية لصورة هذه المنطقة . وقد أوضحنا الأجزاء المتناظرة من حدود المناطق باستخدام الأحرف . وقد أوضحنا كذلك بعض الرواسم التى لم نتعرض لها بالدراسة فى هذا الكتاب ، والتحقق من صحة هذه التحويلات يمكن أن يترك كتمارين للقارىء . ومن الممكن اشتقاق بعض التحويلات المعطاة بملحق (٢) باستخدام تحويلة شفارتز – كريستوفل التى سندرسها بالتفصيل فى الباب العاشر .

تماريــن

١ - اثبت أن الخطوط المستقيمة x = ky ترسم فوق الحلزونيات Spirals $\rho = \exp(k\phi)$ بالتحويلة xD z, حيث $w = \rho \exp(i\phi)$.

٢ - تحقق من صحة صورة المنطقة الموضحة بشكل (٧) من ملحق (٢) وكذلك حدودها بالتحويلة $w = e^z$.

٣ - أوجد صورة الشريحة نصف اللانهائية $x \geqq 0, 0 \leqq y \leqq \pi$ بالتحويلة w = exp z وحدد أجزاء متناظرة من الحدود .

٤ - عين فرعا للدالة log (z-1) يرسم المستوى المركب z عدا النقط $x \geqq 1, y = 0$ الواقعة على المحور الحقيقي فوق الشريحة $0 < v < 2\pi$ من المستوى المركب w .

٥ - حقق أن التحويلة w = sin z تكون تناظرا أحاديا من الخط المستقيم x = c ، حيث $0 < c < \pi/2$ ، فوق الفرع الأيمن من القطع الزائد المعطى بالمعادلة (٣) من بند (٣٩)

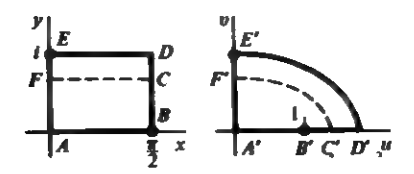
٦ - اثبت أن التحويلة w = sin z ترسم الخط المستقيم x = c ، حيث $\pi/2 < c < \pi$ ، فوق الفرع الأيمن للقطع الزائد المعطى بالمعادلة (٣) من بند (٣٩) . لاحظ أن الراسم يكون أحاديا وأن النصف العلوى والنصف السفلى للخط المستقيم يرسمان فوق النصف السفلى والنصف العلوى للفرع على الترتيب .

٧ - عين صورة الخط المستقيم x = c ، حيث $-\pi < c < -\pi/2$ بالتحويلة w = sin z

٨ - حقق صحة الصورة الناتجة بالراسم sin z للمنطقة الموضحة بشكل (١٠) من ملحق (٢) .

٩ - اثبت أن التحويلة w = sin z ترسم القطع المستقيمة الممثلة لحدود المنطقة المستطيلة $0 \leqq x \leqq \pi/2, 0 \leqq y \leqq 1$ فوق القطع المستقيمة والقوس $D'E'$ كما هو موضح بشكل (٣٦) . القوس $D'E'$ يمثل ربع محيط القطع الناقص

$$(u/\cosh 1)^2 + (v/\sinh 1)^2 = 1$$



التحويلة w = sin z.
شكل (٣٦)

١٠ – أكمل رسم المنطقة المستطيلة الموضحة بشكل (٣٦) وذلك برسم القطع المستقيمة $0 \leqq x \leqq \pi/2,\ y = c$ لإثبات أن التحويلة $w = \sin z$ تكون تناظرا أحاديا بين نقط المنطقة المستطيلة ونقط المنطقة $A'B'D'E'$.

١١ – تحقق من صحة الصورة الناتجة بالراسم $\sin z$ للمنطقة الموضحة بشكل (١١) من ملحق (٢).

١٢ – اثبت أن التحويلة $w = \cosh z$ ترسم النقط $z = iy$ ، حيث $0 \leqq y \leqq \pi/2$ ، إلى القطعة المستقيمة $0 \leqq u \leqq 1, v = 0$ على محور الاحداثيات u .

١٣ – اثبت أن التحويلة $w = \cosh z$ ترسم الشريحة نصف اللانهائية $x \geqq 0,\ 0 \leqq y \leqq \pi/2$ فوق الربع الأول من المستوى المركب w . وضح أجزاء متناظرة من حدود المناطق

١٤ – عبر عن التحويلة $w = \cosh z$ بدلالة التحويلة $w = \sin z$ والدورانات والانتقالات .

١٥ – اثبت أن التحويلة $w = \sin^2 z$ ترسم المنطقة $0 \leqq x \leqq \pi/2,\ y \geqq 0$ فوق المنطقة $v \geqq 0$ ، وبين الأجزاء المتناظرة من الحدود .

١٦ – اثبت أن التحويلة $w = (\sin z)^{1/4}$ ترسم الشريحة نصف اللانهائية $-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2,\ y \geqq 0$ فوق جزء الربع الأول من المستوى المركب w الواقع تحت الخط $v = u$ ، وبين الأجزاء المتناظرة من الحدود .

١٧ – اثبت أن التحويلة الخطية الكسرية $Z = (z-1)/(z+1)$ ترسم محور الاحداثيات x فوق محور الاحداثيات X ، وترسم القطعة المستقيمة $-1 < x < 1,\ y = 0$ الواقعة على محور السينات فوق النصف السالب من محور الاحداثيات X ، وترسم كذلك نصفى المستويين $y < 0$ ، $y > 0$ فوق نصفى المستويين $Y < 0$ ، $Y > 0$ على الترتيب .
اثبت أنه ، بإستخدام الفرع الأساسى ، فإن الدالة المحصلة

$$w = Z^{1/2} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2}$$

ترسم المستوى المركب z ، عدا القطعة المستقيمة $-1 \leqq x \leqq 1,\ y = 0$ الواقعة على محور السينات ، فوق نصف المستوى $u > 0$. (قارن ذلك بتمرين (١٢) من بند (٣٧)) .

١٨ – باستخدام الصورة القطبية للعدد المركب z ، إثبت أن التحويلة

$$w = z + \frac{1}{z}$$

ترسم كل من النصف العلوى والنصف السفلى من الدائرة $r = 1$ فوق القطعة المستقيمة

$$-2 \leqq u \leqq 2,\ v = 0.$$

١٩ - اثبت أن التحويلة $w = z + 1/z$ ترسم الدائرة $r = c$ فوق القطع الناقص

$$u = \left(c + \frac{1}{c}\right)\cos\theta \quad , \quad v = \left(c - \frac{1}{c}\right)\sin\theta.$$

٢٠ - تحقق من صحة الصورة الناتجة بالراسم $w = z + 1/z$ للمنطقة الموضحة بشكل (١٦) من ملحق (٢) .

٢١ - صف التحويلة $w = \cosh z$ بدلالة التحويلات

$$Z = e^{z}, \qquad w = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right).$$

الفصل الخامس

التكاملات Integrals

يمكن للقارىء أن ينتقل مباشرة لدراسة الباب الثامن مستكملا بذلك دراسته للرواسم وتطبيقاتها على المسائل الفيزيائية . وقد يبدو طبيعيا أن نقدم هنا أولا مادة الباب الثامن على أساس أننا قد استكملنا فى الباب الرابع دراسة الرواسم بإستخدام الدوال البسيطة . إلا أنه يجدر بنا أن ننوه هنا بأننا لم نبرهن بعد اتصال المشتقات الجزئية الأولى والثانية لمركبتى دالة تحليلية ، وهو أمر لازم لاستكمال استيعاب مادة الباب الثامن . وعليه فإذا قرر القارىء أن ينتقل مباشرة لدراسة الباب الثامن ، فإنه يتعين عليه افتراض صحة اتصال الدوال التى أشرنا إليها الآن ، وهى حقيقة سنحتاجها هنا فى برهنة بعض النظريات الخاصة بالتكامل .

ونؤكد أن التكاملات تعتبر أداة هامة للغايةفى دراسة دوال المتغير المركب . ومن ناحية أخرى فإن « نظرية التكامل **Theory of integration** » تتميز بجمال رياضى خاص بها ، وذلك لأن النظريات عموما ما تكون قوية وموجزة الصياغة وذات براهين بسيطة فى نفس الوقت . وعلى أية حال فإن « نظرية التكامل » تتميز أيضاً بمالها من استخدامات واسعة فى الرياضيات التطبيقية .

٤٢ – التكاملات المحددة Definite Integrals

حتى يمكن تعريف تكامل دالة **f (z)** بطريقة بسيطة نوعا ما ، نعرف أولا التكامل المحدد **لدالة F لمتغير حقيقى t وذات قيم مركبة** . لنكتب

$$F(t) = U(t) + iV(t) \qquad (a \leqq t \leqq b). \qquad (١)$$

حيث كل من **V,U** دالة حقيقية متصلة قطعة قطعة **Piecewise continuous** (أحياناً يقال لها متصلة اتصالا قطعيا **Sectionally continuous**) فى **t** على فترة محدودة ومغلقة $a \leqq t \leqq b$. ومعنى هذا أن كلا من الدالتين دالة حقيقية متصلة على الفترة المعطاة ،

اللهم الا فيما عند عدد محدود من نقاط الفترة مع مراعاة أنه رغم أن الدالة غير متصلة عند أى من هذه النقط إلا أن لها نهايات يمنى ويسرى هناك وبطبيعة الحال فعند النقطة a فإننا نتطلب وجود نهاية يمنى فقط لكل من الدالتين بينما عند b نتطلب وجود نهاية يسرى لكل منهما . فى هذه الحالة نقول إن الدالة F **متصلة قطعة قطعة** (أو متصلة اتصالا قطعيا) ونعرف التكامل المحدد للدالة F على الفترة $a \leqq t \leqq b$ بدلالة تكاملين محددين من النوع الذى يصادفنا فى حساب التكامل لدوال حقيقية لمتغيرات حقيقية :

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b U(t)\,dt + i\int_a^b V(t)\,dt. \quad (٢)$$

نعلم أن الشروط المعطاة أعلاه على الدوال V,U كافية لضمان وجود تكاملاتهما . **التكامل المعتل Improper integral** لدالة F معرفة على فترة غير محدودة يمكن تعريفه بطريقة مشابهة ، ويكون له وجود إذا كانت التكاملات المعتلة لكل من V,U تقاربية .

من تعريف (٢) نجد أن

$$\operatorname{Re}\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}[F(t)]\,dt. \quad (٣)$$

بالإضافة إلى ذلك فإنه لكل عدد مركب ثابت $\gamma = c_1 + ic_2$ يكون

$$\int_a^b \gamma F\,dt = \int_a^b (c_1U - c_2V)\,dt + i\int_a^b (c_2U + c_1V)\,dt$$
$$= (c_1 + ic_2)\left(\int_a^b U\,dt + i\int_a^b V\,dt\right);$$

أى أن

$$\int_a^b \gamma F(t)\,dt = \gamma\int_a^b F(t)\,dt. \quad (٤)$$

والقواعد مثل قاعدة تكامل مجموع دالتين أو قاعدة تغيير حدود التكامل هى أيضاً متحققة هنا مثلما هى متحققة فى نظرية الدوال الحقيقية للمتغير t .

وللحصول على خاصية أساسية أخرى سنفترض أن قيمة التكامل (٢) عدد مركب لا يساوى صفرا . إذا كان r_0 مقياس هذا العدد ، θ_0 سعة له فإن

$$r_0 e^{i\theta_0} = \int_a^b F\,dt.$$

باستخدام (٤) فإن r_0 تُعْطَى بالمعادلة

$$r_0 = \int_a^b e^{-i\theta_0}F\,dt.$$

لاحظ أن كلا من طرفى هذه المعادلة عدد حقيقى ، وعليه فإن الخاصية (٣) تسمح لنا بأن نكتب

$$r_0 = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0}F)\,dt. \quad (٥)$$

لكن

$$\operatorname{Re}(e^{-i\theta_0}F) \leqq |e^{-i\theta_0}F| = |e^{-i\theta_0}|\,|F| = |F|;$$

وعليه فإن

$$r_0 \leqq \int_a^b |F|\,dt,$$

وذلك بشرط أن يكون $a < b$. وهذا يعنى أن

$$\left|\int_a^b F(t)\,dt\right| \leqq \int_a^b |F(t)|\,dt \qquad (a \leqq b). \qquad (٦)$$

واضح أن هذه المتباينة صحيحة أيضاً عندما تكون قيمة التكامل فى الطرف الأيسر لهذه المتباينة مساوية للصفر .

بإجراء تعديلات طفيفة ثانوية فى المناقشة السابقة ، يمكننا الحصول على متباينات مثل

$$\left|\int_a^\infty F(t)\,dt\right| \leqq \int_a^\infty |F(t)|\,dt$$

بشرط تحقق وجود كل من التكاملين

٤٣ - الكفافات[1] Contours

سنعرف الآن بعض المنحنيات الخاصة والمناسبة لدراسة تكاملات دالة $f(z)$ لمتغير مركب .

يقال لفئة من النقط $z = (x,y)$ فى المستوى المركب أنها تشكل **قوسا Arc** إذا كانت

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad\qquad (a \leqq t \leqq b) \qquad (١)$$

حيث كل من $x(t)$, $y(t)$ دالة متصلة فى البارامتر الحقيقى t . وهذا التعريف يعطى لنا راسما متصلا من الفترة $a \leqq t \leqq b$ إلى المستوى xy وترتب صور نقط الفترة بحسب زيادة قيم t . ويكون من الملائم وصف نقط **قوس** C بالمعادلة

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \qquad\qquad (a \leqq t \leqq b), \qquad (٢)$$

ونصطلح على القول بأن $z(t)$ متصلة إذا كان كل من $x(t)$, $y(t)$ متصلة .

يقال للقوس C أنه **قوس بسيط simple arc** (**أو قوس جوردان Jordan arc**) فى حالة إذا لم يقطع القوس نفسه ؛ أى أن C يكون قوسا بسيطا إذا كان $t_1 \neq t_2$ يستلزم $z(t_1) \neq z(t_2)$. وإذا حدث وكانت $z(t_1) \neq z(t_2)$ طالما $a < t_1 < t_2 < b$ وكان $z(a) = z(b)$ فإننا نقول أن C **منحنى مغلق بسيط Simple closed curve** أو **منحنى جوردان Jordan curve** . الخط المضلعى

---

(١) حاشية للمترجمين : راعينا أن تكون ترجمة كلمة Contour التى نستخدمها هنا متفقة مع كل من المعنى اللغوى والمعنى الرياضى للكلمة .

$$z(t) = \begin{cases} t + it & (0 \leqq t \leqq 1), \\ t + i & (1 \leqq t \leqq 2), \end{cases} \qquad (٣)$$

والذى يتكون من قطعة مستقيمة من O إلى 1+i متبوعة بأخرى من 1+i إلى 2+i يعطينا مثالاً لقوس بسيط ، بينما تعطينا دائرة الوحدة

$$z(t) = \cos t + i \sin t \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi) \qquad (٤)$$

التى مركزها نقطة الأصل مثالاً لمنحنى مغلق بسيط .

يقال للدالة المركبة $z(t)$ والمعطاة بالمعادلة (٢) أنها دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة للبارامتر الحقيقى t إذا كانت كل من $y(t), x(t)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير t . وتعرف المشتقة $z'(t)$ (أو $d[z(t)]/dt$) كالآتى

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \qquad (a \leqq t \leqq b). \qquad (٥)$$

وبطبيعة الحال فإن مشتقة كل من الدالتين $y(t), x(t)$ عند نقطتى النهايتين $t = b, t = a$ يقصد بها المشتقتان اليمنى واليسرى عند هاتين النقطتين على التعاقب .

القوس C المعطى بالمعادلة (٢) يقال له **قوسا أملسا Smooth arc** إذا كانت المشتقة $z'(t)$ لها وجود ومتصلة على الفترة $a \leqq t \leqq b$ وبشرط أن تكون $z'(t) \neq 0$ على طول الفترة . إذا كان $x'(t) = 0$ عند نقطة ما t فإن المتجه $z'(t) = iy'(t)$ يكون عموديا ؛ أما إذا كان $x'(t) \neq 0$ فإن ميل المتجه $z'(t)$ يساوى $y'(t)/x'(t)$ وهذا بدوره يساوى ميل المماس dy/dx للقوس C عند النقطة المناظرة للبارامتر t ؛ وعليه فإن زاوية ميل المماس عند هذه النقطة هى $\arg z'(t)$. وحيث أن $z'(t).$ متصلة فى الفترة $a \leqq t \leqq b$ فإننا نستخلص أن المماس لأى قوس أملس ينعطف عليه بشكل مستمر .

على ضوء المتطابقة

$$|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2},$$

يمكننا التعبير عن طول قوس أملس بالصيغة

$$L = \int_a^b |z'(t)|\, dt. \qquad (٦)$$

يكون من المفيد هنا معرفة مدى التغير فى الصيغة (٦) ، التى تمثل حسب تعريفنا طول القوس C ، إذا ما أحدثنا تغييراً فى التمثيل البارامترى للقوس C . وسيتبين القارىء أن العدد L المعطى بالصيغة (٦) لا تتغير قيمته فى الحالة الهامة التى سنتناولها فيما يلى والمعطاة بالتغيير (٧) للتمثيل البارامترى C وتحت الشروط المعطاة . لتوضيح ذلك نفرض أن .

$$t = \phi(r) \qquad (c \leqq r \leqq d) \qquad (٧)$$

حيث ϕ دالة حقيقية ترسم الفترة $c \leqq r \leqq d$ فوق الفترة $a \leqq t \leqq b$. وسنفرض أن ϕ دالة متصلة ذات مشتقة متصلة . وسنفرض كذلك أن $\phi'(r) > 0$ لكل r ، وهذا يكفل لنا ازدياد t بازدياد r ، بمعنى أن ϕ دالة تزايدية . نلاحظ أنه على ضوء المعادلة (٧) تصبح الصيغة (٦) لطول القوس على الصورة

$$L = \int_c^d |z'[\phi(r)]|\,\phi'(r)\,dr.$$

ومن ناحية أخرى فالتمثيل البارامترى الجديد للقوس C هو

$$z = Z(r) = z[\phi(r)] \qquad (c \leqq r \leqq d) \qquad (٨)$$

من ذلك ، فضلا عن نتيجة تمرين (٦) من هذا البند نحصل على

$$L = \int_c^d |Z'(r)|\,dr.$$

وهذا يبين أن العدد L المعطى بصيغة (٦) يظل ثابتا لا يتغير إذا ما استخدمنا مثل هذا التغيير (٧) فى التمثيل البارامترى للقوس C .

يقال لقوس مكون من عدد محدود من الأقواس الملساء المتصلة بعضها ببعض نهاية بنهاية **كفاف Contour**، أو **قوس أملس قطعة قطعة Piecewise smooth arc** ، وإذا مثلت المعادلة (٢) كفافا فإن كلا من y(t), x(t) تكون دالة متصلة لها مشتقة أولى متصلة قطعة قطعة . وعلى سبيل المثال فالخط المضلعى (٣) مثال لكفاف . إذا كانت g(t) لها نفس القيمة عندنقطتى البداية والنهاية وكانت قيمها مختلفة عند أى نقطتين أخريين فإننا نقول للكفاف C انه **كفاف مغلق بسيط Simple closed contour**. وكأمثلة على ذلك نذكر الدائرة (٤) وكذلك حدود مثلث أو مستطيل مأخوذ فى اتجاه دورانى محدد . طول كفاف ما ، أو كفاف مغلق بسيط ، هو مجموع أطوال الأقواس الملساء التى يتكون منها الكفاف .

يزامل أى منحنى مغلق بسيط ، أو كفاف مغلق بسيط ، C نطاقين تكون نقط C هى فئة النقط الحدية لكل منهما ، وأحد هذين النطاقين محدود ويقال له النطاق الداخلى للمنحنى أو الكفاف C ، بينما يكون النطاق الآخر غير محدود ويطلق عليه النطاق الخارجى للمنحنى أو الكفاف C (بطريقة أخرى النطاق الداخلى هو داخلية المنحنى أو الكفاف ، فى حين يكون النطاق الخارجى هو خارجية المنحنى أو الكفاف) . ورغم أن هذه الحقيقة يمكن قبول التوضيح الهندسى لها ، إلا أن برهانها ليس سهلا . وعلى أية

حال سيكون من الملائم لنا قبول هذه الحقيقة والمعروفة بنظرية المنحنى لجوردان[١]

تماريــن

١ - إحسب

(أ) $\int_0^{\pi/4} e^{it}\,dt$ ؛ (ب) $\int_0^{\infty} e^{-zt}\,dt\ (\mathrm{Re}\, z > 0)$ ؛ (جـ) $\frac{d}{dt} e^{it}$

الأجوبة : (أ) $1/\sqrt{2} + i(1 - 1/\sqrt{2})$ ؛ (ب) $1/z$ ؛ (جـ) ie^{it}

٢ - برهن أنه إذا كانت F دالة من النوع (١) لبند (٤٢) فإن

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_{-b}^{-a} F(-t)\,dt.$$

٣ - إذا كان n,m أعداداً صحيحة ، برهن أن

$$\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int}\,dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ 2\pi & (m = n). \end{cases}$$

٤ - لتكن F دالة ذات قيم مركبة ومتصلة فى t ومعرفة على $a \leqq t \leqq b$. اعط مثالا تبين فيه أنه لا يوجد عدد حقيقى c بين b,a بحيث يكون (b-a) F(c) مساويا للتكامل المحدد للدالة F على هذه الفترة ؛ ومن ثم استنتج أن نظرية القيمة المتوسطة للتكامل المعروفة فى مبادىء علم التكامل غير قابلة للتطبيق هنا لمثل هذه الدوال .

اقتراح : استخدم حالة خاصة لنتيجة تمرين (٣) .

٥ - لتكن $f(t) = u(t) + iv(t)$ دالة ذات قيم مركبة لمتغير حقيقى t ومتصلة قطعة قطعة على الفترة $a \leqq t \leqq b$. برهن أنه إذا كانت $F(t) = U(t) + iV(t)$ دالة بحيث $F'(t) = f(t)$، فإن

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

٦ - استنبط الصيغة (٩) لبند (٤٣) .

اقتراح : اعتبر الدالة $Z(r) = x[\phi(r)] + iy[\phi(r)]$ ثم طبق قاعدة السلسلة للدوال الحقيقية لمتغير حقيقى .

٧ - لتكن الدالة $z(t) = x(t) + iy(t)$ ، حيث $a \leqq t \leqq b$ ، ممثلة لقوس أملس ولتكن كل قيمة من قيم الدالة واقعة فى نطاق تعريف دالة تحليلية w = f(z) . برهن أنه إذا كان $w(t) = f[z(t)]$ فإن $w'(t) = f'[z(t)]z'(t)$.

اقتراح : اعتبر الدالة $w(t) = u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]$ ثم طبق قاعدة السلسلة فى حساب التفاضل لمتغيرات حقيقية .

---

(١) انظر بند (١٣) لمؤلف ثرون Thron المذكور فى ملحق (١) فى آخر الكتاب .

٤٤ – التكاملات الخطية Line Integrals

نعرف الآن التكامل المحدد لدالة f لمتغير مركب zوذات قيم مركبة ، ويعرف هذا التكامل بدلالة قيم f(z) على طول كفاف معطى C ممتد من النقطة $z = \alpha$ إلى النقطة $z = \beta$ فى المستوى المركب ؛ وهذا هو سبب تسميته بالتكامل الخطى . وقيمة هذا التكامل تتوقف عموما على الكفاف C وفى نفس الوقت على الدالة f ، ومثل هذا التكامل يكتب على الصورة

$$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz \quad \text{أو} \quad \int_C f(z)\,dz$$

والتدوين الثانى (الأيسر) عادة ما يستخدم عندما تكون قيمة التكامل لا تعتمد على اختيار الكفاف المرسوم بين نقطتى النهاية . وبينما يمكن تعريف التكامل الخطى مباشرة على أنه نهاية مجموع ، إلا أننا نفضل هنا تعريفه بدلالة تكامل محدد من النوع الذى عرفناه فى بند (٤٢) .

ليكن C كفافا معرفا بالمعادلة

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad (a \leqq t \leqq b) \qquad (١)$$

وممتداً من النقطة $\alpha = z(a)$ إلى النقطة $\beta = z(b)$. ولتكن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة متصلة اتصالا قطعيا على C ، وهذا يعنى أن الجزئين الحقيقى والتخيلى

$$v[x(t), y(t)] \quad \text{و} \quad u[x(t), y(t)]$$

للدالة $f[z(t)]$ دالتان متصلتان اتصالا قطعيا فى t . نعرف التكامل الخطى للدالة f على طول C كالآتى :

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\,dt. \qquad (٢)$$

وحيث أن

$$f[z(t)]z'(t) = \{u[x(t),y(t)] + iv[x(t),y(t)]\}[x'(t) + iy'(t)],$$

فإن تعريف (٢) يمكن كتابته بدلالة تكاملات لدوال حقيقية لمتغير حقيقى . ووفقاً لتعبيرنا (٢) بند (٤٢) ، فإن هذا يعنى

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b (ux' - vy')\,dt + i\int_a^b (vx' + uy')\,dt. \qquad (٣)$$

وحيث أن C كفاف ، فإننا نلاحظ أن الدالتين x' و y' ، تماماً كالدالتين v,u ، دالتان متصلتان اتصالا قطعيا فى t؛ ومن ثم فإن تكاملى الطرف الأيمن للمعادلة (٣) لهما وجود ، مما يكفل لنا وجود التكامل المعرف فى (٢) .

وبدلالة تكاملات خطية لدوال حقيقية لمتغيرين حقيقيين ، فإننا نحصل على

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy. \qquad (٤)$$

لاحظ أن التعبير (٤) يمكن كتابته إذا اصطلحنا اصطلاحا شكليا على ابدال f بالمقدار u + iv و dz بالمقدار dx + i dy وفك حاصل الضرب (كما لو كان ضرب أعداداً مركبة) .

سنتفق – مالم ينص على خلاف ذلك – على أن مسارات التكامل هي كفافات وعلى أن المكاملات دوال متصلة اتصالا قطعيا على هذه الكفافات .

الكفاف C في (٢) يزامله كفاف آخر C – والذى يتكون من نفس نقط الكفاف C مع عكس ترتيب هذه النقط ، بمعنى أن الكفاف الجديد يمتد من β إلى α. الكفاف C- تصفه المعادلة z = z(- t) حيث $-b \leqq t \leqq -a$. ومن ثم

$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_{-b}^{-a} f[z(-t)][-z'(-t)]\,dt,$$

حيث $z'(-t)$ ترمز لمشتقة z(t) بالنسبة للمتغير t عند النقطة t - . وباستبدال مناسب للمتغير t في تكامل الطرف الأيمن لهذه العلاقة (انظر تمرين بند (٤٣)) نتبين أن

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$$

نشير الآن إلى ثلاث خواص أخرى للتكامل الخطى والتى يمكن الحصول عليها بشكل مباشر من أحد التعبيرين (٢) أو (٣) . وبالتحديد

$$\int_C \gamma f(z)\,dz = \gamma \int_C f(z)\,dz, \qquad (٦)$$

لأى عدد مركب ثابت γ ، و

$$\int_C [f(z) + g(z)]\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz. \qquad (٧)$$

ومن ناحية أخرى إذا كان الكفاف C يتكون من كفافين أحدهما C_1 من α_1 إلى β_1 والآخر C_2 من α_2 إلى β_2 حيث $\beta_1 = \alpha_2$ فإن

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz. \qquad (٨)$$

ووفقا للتعريف (٢) أعلاه واتساقا مع الخاصية (٦) بند (٤٢) نجد أن

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqq \int_a^b |f[z(t)]z'(t)|\,dt.$$

وعليه فإنه لأى ثابت M محقق للمتباينة $|f(z)| \leqq M$ لأى z على الكفاف C ، يكون

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqq M\int_a^b |z'(t)|\,dt.$$

الآن التكامل المعطى على يمين هذه المتباينة يمثل طول الكفاف L . وتأسيسا على ذلك فإن مقياس قيمة تكامل f على امتداد C لا تتعدى ML ، أى أن

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqq ML. \tag{٩}$$

وبطبيعة الحال فإن التساوى يكون مستبعدا فى هذه المتباينة إذا حدث وكان $|f(z)| < M$ لجميع النقط z على C .

ويجب أن نراعى جيدا أن مثل هذا العدد M الوارد فى المتباينة (٩) ، له وجود دائماً لمثل الأقواس والدوال التى نتناولها هنا . ولتوضيح ذلك نفرض أن f دالة معرفة على قوس C . المتطابقة

$$|f(z)| = |f[z(t)]| \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

صحيحة طالما كانت z على C . فإذا افترضنا بالاضافة إلى ذلك أن f متصلة فوق C ، فإن $|f[z(t)]|$ تمثل بالتالى دالة حقيقية متصلة على فترة مغلقة محدودة ، ومثل هذه الدالة لها قيمة عظمى على هذه الفترة[1] . هذه الملاحظات يمكننا الآن تعميمها مباشرة لتشمل الحالة التى تكون فيها f متصلة اتصالا قطعيا على C .

نلاحظ أن قيمة التكامل الخطى لا تتغير إذا أحدثنا تغييراً على غرار التغيير المعطى بمعادلة (٧) بند (٤٣) فى التمثيل البارامترى للكفاف المحسوب التكامل على امتداده . ولتبين ذلك نكتب التكاملات فى الطرف الأيمن من معادلة (٣) بدلالة البارامتر r ، ثم نستخدم الطريقة المتبعة فى بند (٤٣) لإثبات عدم تغير طول القوس .

نعلم من مبادىء علم التكامل أن التكاملات المحددة يمكن تفسيرها أحياناً على أنها طريقة لحساب المساحات (فى الواقع يمكن استخدامها كتعريف للمساحة) وذلك بالإضافة إلى تفسيرات أخرى لمفهوم التكامل المحدد . أما بالنسبة للتكامل فى المستوى المركب فإنه لا توجد – اللهم إلا فى حالات خاصة – تفسيرات هندسية أو فيزيائية مناظرة مفيدة . ورغم ذلك – كما ألمحنا من قبل-فإن لنظرية التكامل فى المستوى المركب تطبيقات هامة ملحوظة فى الرياضيات البحتة والتطبيقية سواء .

٤٥ – أمثلة Examples

دعنا نحسب الآن قيمة التكامل

---

(١) انظر على سبيل المثال كتاب "Adranced Calcvlus" تأليف تايلور ومان A.E. Taylor, W.R. Mann الطبعة الثانية ص ٩٢ – ٩٦ ، ١٩٧٢

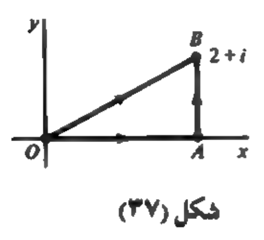
$$I_1 = \int_{C_1} z^2\, dz$$

فى الحالة التى يكون فيها C_1 هو القطعة المستقيمة OB من $z = 0$ إلى $z = 2 + i$ (شكل (٣٧)) . لاحظ أن نقط C_1 تقع على الخط المستقيم $x = 2y$ ؛ وعليه إذا استخدمنا y كبارامتر فإن المعادلة البارامترية للكفاف تكون

$$z(y) = 2y + iy \qquad (0 \leqq y \leqq 1).$$

ويمكن أيضاً كتابة المكامل z^2 (على C_1) على الصورة

$$z^2 = x^2 - y^2 + i2xy = 3y^2 + i4y^2.$$



شكل (٣٧)

وعليه فإن

$$I_1 = \int_0^1 (3y^2 + i4y^2)(2 + i)\, dy$$
$$= (3 + 4i)(2 + i) \int_0^1 y^2\, dy = \tfrac{2}{3} + \tfrac{11}{3}i.$$

نأخذ الآن مساراً آخر C_2 للتكامل ، ألا وهو الكفاف OAB المبين فى شكل (٣٧) . فى هذه الحالة تكون قيمة التكامل

$$I_2 = \int_{C_2} z^2\, dz = \int_{OA} z^2\, dz + \int_{AB} z^2\, dz.$$

كمعادلة بارامترية للقوس OA نأخذ$(0 \leqq x \leqq 2)$ $z(x) = x$ وكمعادلة بارامترية للقوس AB نأخذ $z(y) = 2 + iy\ (0 \leqq y \leqq 1).$ إذن

$$I_2 = \int_0^2 x^2\, dx + \int_0^1 (2 + iy)^2 i\, dy$$
$$= \tfrac{8}{3} + i\left[\int_0^1 (4 - y^2)\, dy + 4i \int_0^1 y\, dy\right] = \tfrac{2}{3} + \tfrac{11}{3}i.$$

يتصادف فى حالتنا هذه أن معادلة الكفاف **OAB** يمكن كتابتها على الصورة

$$z(t) = \begin{cases} t & (0 \leqq t \leqq 2), \\ 2 + i(t-2) & (2 \leqq t \leqq 3). \end{cases}$$

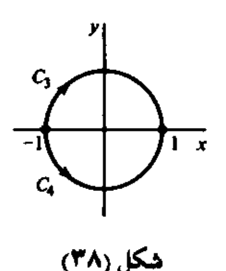
لاحظ أن $I_1 = I_2$ ؛ وعليه فإن تكامل z^2 على الكفاف البسيط المغلق **OABO** هو $I_2 - I_1 = 0$ ، وسنرى بعد قليل أن ذلك صحيح لأن المكامل z^2 دالة تحليلية داخل الكفاف وعليه (أى لجميع نقاط الكفاف **C** وداخليته)

وكمثال ثالث سنعتبر المكامل المعرف بالدالة

$$f(z) = \bar{z},$$

ونأخذ النصف الأعلى للدائرة $|z| = 1$ من $z = -1$ إلى $z = 1$ كمسار C_3 للتكامل (شكل (٣٨)) . وكمعادلة بارامترية للكفاف C_3 ــ نأخذ $z(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ أى

$$z(\theta) = e^{i\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi).$$



شكل (٣٨)

إذن

$$I_3 = \int_{C_3} \bar{z}\, dz = -\int_{-C_3} \bar{z}\, dz = -\int_0^{\pi} e^{-i\theta} i e^{i\theta}\, d\theta = -\pi i.$$

التكامل I_4 بين نفس النقطتين على طول نصف الدائرة السفلى C_4 والممثل بالمعادلة

$$z(\theta) = e^{i\theta} \qquad (\pi \leqq \theta \leqq 2\pi),$$

يمكن حسابه مباشرة

$$I_4 = \int_{C_4} \bar{z}\, dz = \int_{\pi}^{2\pi} e^{-i\theta} i e^{i\theta}\, d\theta = \pi i.$$

لاحظ أن $I_4 \neq I_3$ وبأن التكامل I_C حول الدائرة **C** بأكملها وفى اتجاه مضاد لعقرب الساعة لا يساوى صفرا :

$$I_C = \int_C \bar{z}\, dz = I_4 - I_3 = 2\pi i.$$

إذا كانت z نقطة على دائرة الوحدة **C** فإن

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z};$$

وعليه فإن الدوال المكاملة فى التكاملات $I_3, I_4,$ و I_C يمكن استبدالها بالدالة $1/z$ وعلى وجه التخصيص ،

$$I_C = \int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

وكمثال أخير ، ليكن الكفاف C_5 هو القطعة المستقيمة من $z = i$ إلى $z = 1.$ بدون حساب التكامل

$$I_5 = \int_{C_5} \frac{dz}{z^4},$$

دعنا نوجد حدًا أعلى لقيمته المطلقة . مسار التكامل هو قطعة من المستقيم $y = 1 - x$. وعليه ، إذا كانت z نقطة على C_5 ، فإن

$$|z^4| = (x^2 + y^2)^2 = [x^2 + (1 - x)^2]^2 = (2x^2 - 2x + 1)^2$$

وهذا يعنى أن

$$|z^4| = [2(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{2}]^2 \geqq \tfrac{1}{4},$$

وذلك لأن $(x - \frac{1}{2})^2 \geqq 0$. وتبعا لذلك فإن لكل z على $C_5,$:

$$\left|\frac{1}{z^4}\right| \leqq 4.$$

وحيث أن طول C_5 يساوى $\sqrt{2}$ ، فبوضع $M = 4$ فى المتباينة (٩) بند (٤٤) نحصل على

$$|I_5| \leqq 4\sqrt{2}.$$

تمارين

لكل قوس C ولكل دالة f فى التمارين من ١ إلى ٥ اوجد قيمة التكامل

$$\int_C f(z)\, dz$$

وذلك بعد التأكد من أن C كفاف وبأن f متصلة قطعة قطعة على C

١ - $f(z) = y - x - 3x^2 i$ و C

(أ) القطعة المستقيمة من $z = 0$ إلى $z = 1 + i$ ؛

(ب) يتكون من قطعتين مستقيمتين إحداهما من $z = 0$ إلى $z = i$ والأخرى من $z = i$ إلى $z = 1 + i$.

الأجوبة : (أ) $1 - i$ ؛ (ب) $(1 - i)/2$.

٢ - $f(z) = (z + 2)/z$ و C

(أ) نصف الدائرة $z = 2e^{i\theta}\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ ؛

(ب) نصف الدائرة $z = 2e^{i\theta}\ (\pi \leqq \theta \leqq 2\pi)$ ؛

(جـ) نصف الدائرة $z = 2e^{i\theta}\ (-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$.

الأجوبة : (أ) $-4-2\pi i$ ؛ (ب) $4+2\pi i$ ؛ (جـ) $4\pi i$.

٣ $z-1$ $f(z)$ و C هو القوس من $z=0$ إلى $z=2$ والذى يتكون من

(أ) نصف الدائرة $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ $z-1=e^{i\theta}$ ؛

(ب) القطعة المستقيمة $0 \leqq x \leqq 2, y=0$ من المحور الحقيقى (السينات)

الأجوبة : (أ) صفر ؛ (ب) صفر

٤ – المنحنى C من $z=-1-i$ إلى $z=1+i$ بمحاذاة المنحنى $y=x^3$ و

$$f(z)=\begin{cases}4y & (y>0),\\ 1 & (y<0).\end{cases}$$

الإجابة : $2+3i.$

٥ – $f(z)=e^z$ و C هو القوس من $z=\pi i$ إلى $z=1$ والمكون من

(أ) القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين ،

(ب) القطعتين المستقيمتين إحداهما من $z=\pi i$ إلى $z=0$ والأخرى من $z=0$

إلى $z=1$.

الأجوبة : (أ) $1+e$ ؛ (ب) $1+e$

٦ – احسب قيمة التكامل $\int_c z^m \bar{z}^n \, dz$

حيث n,m أعداداً صحيحة و C الدائرة $|z|=1$ فى مسار مضاد لاتجاه عقرب الساعة

(انظر تمرين (٣) بند (٤٣))

٧ – اثبت أنه إذا كان C هو محيط المربع الذى رؤوسه هى النقط $z=1+i$,$z=0, z=1,$

$z=i$ وفى مسار مضاد لاتجاه عقرب الساعة فإن

$$\int_c (3z+1)\, dz=0.$$

٨ – احسب قيمة التكامل الآتى على نفس كفاف التمرين السابق

$$\int_c \pi \exp(\pi \bar{z})\, dz.$$

الإجابة : $4(e^{\pi}-1)$.

٩ – احسب التكامل I_3 فى بند (٤٥) مستخدما التمثيل البارامترى الآتى للكفاف C_3

$$z(t)=t+i\sqrt{1-t^2} \qquad (-1 \leqq t \leqq 1).$$

١٠ – ليكن C هو قوس الدائرة $|z|=2$ من $z=2$ إلى $z=2i$ والواقع فى الربع الأول

من المستوى . بدون حساب التكامل ، اثبت أن

$$\left|\int_c \frac{dz}{z^2+1}\right| \leqq \frac{\pi}{3}.$$

١١ – اثبت أنه إذا كان C هو محيط المثلث الذى رؤوسه هى النقط $z=0$ ، $z=3i, z=-4$

وكان مسار C مضادا لاتجاه عقرب الساعة ، فإن

$$\left|\int_c (e^z-\bar{z})\, dz\right| \leqq 60.$$

١٢ - ليكن C هو الدائرة $|z| = R$ موجها فى اتجاه مضاد لاتجاه عقرب الساعة وحيث $R > 1$. برهن أن

$$\left| \int_C \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\, dz \right| < 2\pi \frac{\pi + \operatorname{Log} R}{R}$$

ومن ثم بين أن قيمة التكامل تؤول إلى الصفر عندما تؤول R إلى ∞ .

١٣ - بكتابة التكامل بدلالة تكاملات لدوال ذات قيم حقيقية لمتغير حقيقى اثبت أن

$$\int_{\alpha}^{\beta} dz = \beta - \alpha$$

وذلك عندما يكون مسار التكامل من $z = \alpha$ إلى $z = \beta$:

(أ) قوسا أملسا ؛ (ب) كفاف

١٤ - اثبت أن

$$\int_{\alpha}^{\beta} z\, dz = \tfrac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$$

وذلك عندما يكون مسار التكامل من $z = \alpha$ إلى $z = \beta$:

(أ) قوس أملس ؛ (ب) كفاف

١٥ اثبت أنه إذا كان C هو الدائرة

$$z - z_0 = r_0 e^{i\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi),$$

موجها فى اتجاه مضاد لاتجاه عقرب الساعة وكانت f متصلة على C_0 فإن

$$\int_{C_0} f(z)\, dz = i r_0 \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_0 e^{i\theta}) e^{i\theta}\, d\theta.$$

١٦ - استخلص النتائج الخاصة التالية من نتيجة تمرين (١٥)

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \qquad \int_{C_0} (z - z_0)^{n-1}\, dz = 0 \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

٤٦ - نظرية كوشى - جورساه The Cauchy-Goursat Theorem

لنفرض أن الدالتين الحقيقيتين $Q(x,y)$ و $P(x,y)$ فضلا عن مشتقاتهما الجزئية الأولى دوال متصلة لجميع نقط منطقة مغلقة R مكونة من جميع النقط داخل وعلى كفاف مغلق بسيط C . وسنعتبر أن الاتجاه الدورانى للكفاف هو الاتجاه الموجب **Positive sense** (أى فى اتجاه مضاد لاتجاه عقرب الساعة) وذلك حتى تكون النقط الداخلية للمنطقة R واقعة على يسار C . ووفقا لنظرية جرين **Green's theorem** للتكامل الخطى فى حساب التفاضل والتكامل للمتغيرات الحقيقية يكون

$$\int_C P\, dx + Q\, dy = \iint_R (Q_x - P_y)\, dx\, dy.$$

سنعتبر الآن أن الدالة

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

دالة تحليلية لجميع نقط مثل هذه المنطقة R فى المستوى z . وسنفرض بالاضافة إلى ذلك

أن $f'(z)$ متصلة هناك . المركبات v,u فضلا عن مشتقاتها الجزئية الأولى هى بالتالى دوال متصلة فى R ؛ مما يستتبع

$$\int_C u\,dx - v\,dy = -\iint_R (v_x + u_y)\,dx\,dy,$$

$$\int_C v\,dx + u\,dy = \iint_R (u_x - v_y)\,dx\,dy.$$

وعلى ضوء معادلتى كوشى – ريمان ، فإن مكامل كل من هذين التكاملين الثنائيين يكون مساويا للصفر عند كل نقطة من نقط R ، ووفقا للمعادلة (٤) بند (٤٤) ، فإن التكاملات الخطية على يسار المعادلتين السابقتين أعلاه تمثلان الجزآن الحقيقى والتحيلى على التوالى لقيمة التكامل f(z) حول C . وعليه فإننا نحصل على النتيجة التالية :

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

التى توصل إليها كوشى فى بداية القرن الماضى .

وكأمثلة بسيطة نلاحظ أنه إذا كان C كفافا مغلقاً بسيطا فإن

$$\int_C dz = 0, \qquad \int_C z\,dz = 0, \qquad \int_C z^2\,dz = 0$$

وذلك لأن الدوال z^2 $1, z,$ دوال شاملة ومشتقاتها متصلة لجميع النقط .

لقد كان جورساه E. Goursat (١٨٥٨ – ١٩٣٦) هو أول من برهن إمكانية إسقاط شرط اتصال $f'(z)$. واستبعاد شرط الاتصال هذا هام . وإحدى النتائج – على سبيل المثال – هى أن مشتقات الدوال التحليلية هى أيضاً تحليلية . النظرية التالية والتى يطلق عليها نظرية كوشى – جورساه **Cauchy-Goursat theorem** هى الصورة المعدلة لنظرية كوشى

نظرية : إذا كانت f دالة تحليلية عند جميع النقاط داخل وعلى كفاف مغلق بسيط C ، فإن

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

سنستعرض برهان هذه النظرية فى البندين التاليين ، حيث سنعتبر – وحتى نكون محددين – أن توجيه مسار C هو الاتجاه الموجب . وسيكون أمراً سهلاً أن نعمم النظرية لتشمل مسارات أعم مثل الحدود الكاملة لمنطقة محصورة بين دائرتين متحدتى المركز .

٤٧ – تمهيدية A Preliminary Lemma

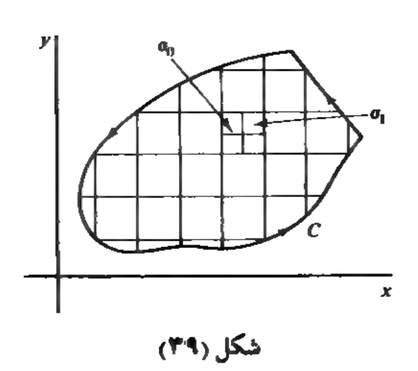
نبدأ بتجزيىء المنطقة R والمكونة من النقاط داخل وعلى C إلى فئات جزئية وذلك برسم خطوط مستقيمة على أبعاد متساوية وموازية لكل من المحورين الحقيقى والتخيلى وبحيث يكون البعدين أى خطين متجاورين رأسيين مساويا للبعد بين أى خطين

متجاورين أفقيين . وعليه أمكننا تكوين عدداً محدوداً من المناطق الجزئية المربعة المغلقة بحيث تنتمى كل نقطة من R إلى واحدة على الأقل من هذه المناطق الجزئية . وللسهولة سيكون استخدامنا للفظ المربعات مرادفا لهذه المناطق الجزئية المربعة المغلقة ، مع مراعاة أن كلمة مربع سنعنى بها محيط هذا المربع بالاضافة إلى جميع النقاط داخل هذا المربع . وإذا حدث وكان أحد هذه المربعات محتويا لنقاط لا تنتمى إلى R ، فإننا نستبعد هذه النقاط ونسمى ما تبقى مربع جزئى . وبهذه الطريقة أمكننا تغطية Coverالمنطقة R بعدد محدود من المربعات والمربعات الجزئية (شكل (٣٩)) ، وهذه التغطية للمنطقة R هى نقطة البداية لبرهان التمهيدية التالية :

تمهيدية : لتكن f دالة تحليلية عند جميع نقاط منطقة مغلقة R تتكون من النقاط الواقعة على أو داخل كفاف مغلق بسيط C . لكل عدد صحيح موجب ε ، توجد تغطية للمنطقة R بعدد محدود (n) من المربعات والمربعات الجزئية بحيث إذا كان C_j هو حدود المربع أو المربع الجزئى الذى ترتيبه j فى هذا التجزيىء للمنطقة R ، فإنه توجد نقطة z_j على أو داخل C_j محققة للمتباينة

$$\left|\frac{f(z)-f(z_j)}{z-z_j}-f'(z_j)\right|<\varepsilon \qquad (j=1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

وذلك لجميع z ، $z \neq z_j$ ، الواقعة على أو داخل C_j



شكل (٣٩)

لنفرض أن الغطاء الذى كوناه قبل ذكر نص التمهيدية مباشرة به مربع ، أو مربع جزئى ، حدوده C_j ولا يحتوى مثل هذه النقطة z_j التى تحقق المتباينة (١) . إذا كانت هذه المنطقة الجزئية مربعا ، قسمه إلى أربعة مربعات وذلك برسم القطعتين المستقيمتين التى تصل كل منهما منتصفى ضلعين متقابلين من هذا المربع (شكل (٣٩)) ؛ وإذا لم تكن كذلك – أى كانت مربعا جزئيا – اكمل المربع وقسمه إلى أربعة مربعات متساوية بنفس الطريقة ثم استبعد بعد ذلك الأجزاء الواقعة خارج المنطقة R . إذا لم تحوى كل من

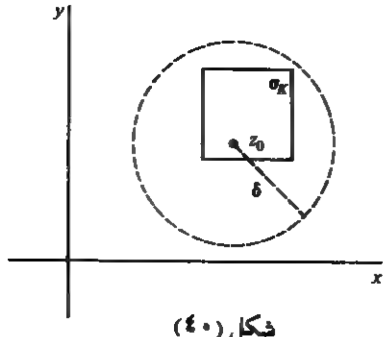
هذه المناطق الجزئية الصغيرة نقطة z_j تحقق المتباينة (١) ، قسمها بنفس الطريقة السابقة إلى مربعات ومربعات جزئية أصغر ، وهكذا .

بإجراء العمليات السابقة على كل منطقة جزئية – من مناطق التغطية الأصلية للمنطقة R - قد تحتاج إلى مثل هذه التقسيمات الجزئية الداخلية ، فإننا قد نجد بعد عدد محدود من هذه الخطوات أن المنطقة R قد غطيت بالفعل بمجموعة من المربعات والمربعات الجزئية والتى يحقق كل منها المتباينة (١) . وفى هذه الحالة تكون المتباينة قد برهنت .

نفترض الآن أن استمرارنا لعدد محدود من المرات فى إجراء التقسيمات الجزئية ، والمشار إليها سابقا ، على مربع أو مربع جزئى لا يؤدى بنا إلى إيجاد النقطة المطلوبة z_j لتحقيق المتباينة (١) . إذا كانت هذه المنطقة الجزئية مربعا سنرمز لها بالرمز σ_0 ، اما إذا كانت مربعا جزئيا سنعتبر الرمز σ_0 دالاً على المربع المكمل لهذا المربع الجزئى . عند تقسيم σ_0 إلى أربعة مربعات جزئية بنفس الطريقة ، نختار واحداً منها لا تحقق أى من نقاطه الواقعة فى R الشرط المطلوب استيفائه للنقطة z_j لتحقيق المتباينة (١) . هذا المربع الجزئى له وجود بطبيعة الحال ونرمز له بالرمز σ_1 .
إذا اخترنا استدلاليا σ_{k-1} حيث $(k = 1,2,\ldots)$، سنتفق على اختيار σ_k بأن يكون هو أسفل مربع وإلى أقصى اليسار من المربعات الأربعة التى ينقسم إليها المربع σ_{k-1} .
وبهذا الأسلوب نكون قد حصلنا على متتابعة لا نهائية

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_k, \ldots$$

من المربعات المتداخلة أو المعششة **Nested squares** بحيث يكون σ_{k+1} محتويا للمربع σ_k لجميع $k = 1,2,\ldots$. كما أنه يمكن بسهولة إثبات (تمرين (١٣) بند (٥٠)) أنه توجد نقطة z_0 مشتركة بين جميع هذه المربعات σ_k ، كما أن كلا من هذه المربعات يكون محتويا على نقط فى R . وواضح من هذا البناء أن هذه المربعات تأخذ فى الصغر كلما ازدادت k ، وأن أى جوار $|z - z_0| < \delta$ للنقطة z_0 يحتوى كل مربع – فى هذه المتتابعة – يكون طول قطره أقل من δ . وهذا يعنى أن كل جوار $|z - z_0| < \delta$ يحتوى نقاطا من R بخلاف z_0 ، وعليه فإن:
z_0 تكون نقطة تراكم للمنطقة R بالضرورة . وحيث أن R منطقة مغلقة، فإن z_0 لابد وأن تكون نقطة منتمية لها .



شكل (٤٠)

الدالة f تحليلية على المنطقة R بأكملها ؛ ومن ثم فإنها تكون تحليلية عند النقطة z_0 على وجه التخصيص . وبالتالى فإن المشتقة $f'(z_0)$ لها وجود . ومن تعريف مشتقة الدالة فإنه يوجد لكل عدد موجب ε جوار $|z - z_0| < \delta$ بحيث

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$$

لجميع النقط $z \neq z_0$ فى هذا الجوار . ومن ناحية أخرى فإن الجوار $|z - z_0| < \delta$ يحتوى بالفعل مربع σ_K طول قطره أقل من δ (شكل (٤٠)) ، وبطبيعة الحال هذا ممكن دائماً بجعل k كبيرة كبرا كافيا إذا اقتضت الضرورة . وعليه فإن مجمل المناقشة السابقة يعنى أن النقطة z_0 فى σ_K تحقق المتباينة (١) لجميع z فى σ_K والواقعة فى R ، مما يناقض ما أدى إليه الفرض بأن المربع σ_K باعتباره أحد مربعات المتتابعة - لا يحتوى نقطة فى R تحقق المتباينة (١) . وبهذا التناقض نكون قد أكملنا البرهان .

٤٨ - برهان نظرية كوشى - جورساه Proof of the Cauchy-Goursat Theorem

سنبرهن الآن صحة المتباينة

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| < \gamma \tag{١}$$

لكل عدد موجب γ ، وعليه فإننا نخلص إلى أن قيمة التكامل نفسه تساوى الصفر

إذا أعطينا عددا اختياريا موجبا ε فإنه يمكننا على ضوء التمهيدية المبرهنة فى البند السابق تغطية المنطقة R بفئة من المربعات والمربعات الجزئية حدودها C_j حيث $j = 1, 2, \ldots, n$ والآن يمكننا صياغة المتباينة (١) من تمهيدية البند السابق على النحو التالى : كل دالة

$$\delta_j(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) & (z \neq z_j) \\ 0 & (z = z_j) \end{cases} \tag{٢}$$

معرفة على المربع أو المربع الجزئى الذى ترتيبه j تحقق المتباينة

$$|\delta_j(z)| < \varepsilon \tag{٣}$$

لجميع النقط z فى نطاق تعريفها . لاحظ أن كلا من هذه الدوال دالة متصلة عند كل نقطة من نقاط تعريفها .

نلاحظ الآن أن قيمة الدالة f عند أى نقطة z على الحد C_j لمربع (أو مربع جزئى) ترتيبه j يمكن كتابتها على الصورة

$$f(z) = f(z_j) - z_j f'(z_j) + f'(z_j)z + (z - z_j)\delta_j(z). \qquad (٤)$$

إذن فبأخذ التكامل حول C_j فى اتجاه مضاد لعقرب الساعة فإن النتائج التالية لبند(٤٦)

$$\int_{C_j} dz = 0, \qquad \int_{C_j} z\, dz = 0,$$

تسمح لنا باستنتاج العلاقة

$$\int_{C_j} f(z)\, dz = \int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z)\, dz. \qquad (٥)$$

الآن إذا اعتبرنا التكامل فى الطرف الأيسر لجميع $j = 1, 2, \ldots, n$ ، فإننا نحصل على

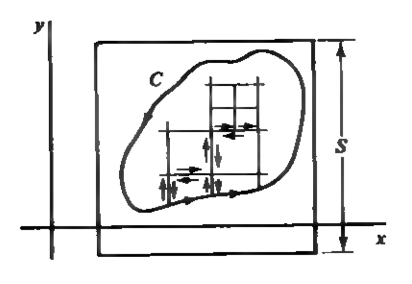
$$\sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)\, dz = \int_C f(z)\, dz.$$

وذلك لأن التكاملين حول الحدود المشتركة لكل زوجين من هذه المناطق الجزئية لهما قيمتان متساويتان ومختلفتان فى الإشارة ، وذلك على اعتبار أن اتجاه إجراء التكامل بالنسبة لأحد الزوجين وعلى القطعة المستقيمة المشتركة بينهما يكون معاكسا لاتجاه إجراء التكامل بالنسبة للزوج الآخر على نفس القطعة المستقيمة المشتركة (شكل (٤١)) . وهذا يعنى أن التكاملات المتبقية هى المأخوذة فقط بطول الأقواس التى تكون C وهو ما تشير إليه العلاقة السابقة . ومن ذلك فإن المعادلة (٥) تعطى الآن

$$\int_C f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} (z - z_j)\, \delta_j(z)\, dz,$$

أى أن

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leqq \sum_{j=1}^{n} \left|\int_{C_j} (z - z_j)\, \delta_j(z)\, dz\right|. \qquad (٦)$$



شكل (٤١)

دعنا الآن نستخدم خاصية (٩) بند (٤٤) لنجد حدا أعلى لكل تكامل فى الطرف الأيمن للمتباينة (٦) . للوصول إلى ذلك تذكر ابتداءاً أن كل C_j يمثل حدود ، أو جزءا من حدود ، مربع كامل . سنرمز لطول ضلع هذا المربع أو المربع الجزئى بالرمز s_j . ولما

كان كل من المتغير z والنقطة z_j فى التكامل الذى رتبته j للطرف الايمن من المتباينة (٦) يقع على المربع C_j ، فإننا نستنتج أن

$$|z - z_j| \leqq \sqrt{2}s_j.$$

وبذلك ووفقا للمتباينة (٣) يتبين لنا أن المكامل الموجود بالطرف الأيمن للمتباينة (٦) يحقق الشرط

$$|(z - z_j)\delta_j(z)| < \sqrt{2}s_j\varepsilon. \qquad (٧)$$

إذا كان المسار C_j مربعا كاملاً فإن طوله يكون $4s_j$. وتكون المساحة A_j لهذا المربع محققة للمتباينة

$$\left|\int_{C_j}(z - z_j)\delta_j(z)\,dz\right| < \sqrt{2}s_j\varepsilon 4s_j = 4\sqrt{2}A_j\varepsilon. \qquad (٨)$$

أما إذا كان حد C_j هو مربع جزئى ، فإن طول C_j فى هذه الحالة لا يتعدى $4s_j + L_j$ حيث L_j طول الجزء المشترك بين كل من C, C_j . وفى هذه الحالة يكون

$$\left|\int_{C_j}(z - z_j)\delta_j(z)\,dz\right| < \sqrt{2}\,s_j\varepsilon(4s_j + L_j) < 4\sqrt{2}\,A_j\varepsilon + \sqrt{2}\,SL_j\varepsilon \qquad (٩)$$

حيث S يمثل طول ضلع مربع نختاره بحيث يحتوى بداخله كلا من الكفاف C بأكمله وجميع المربعات الأصلية التى استخدمت فى تغطية C (انظر شكل (٤١)) . لاحظ أن مجموع المساحات A_j لا يتعدى S^2 .

إذا كان L هو طول الكفاف C فإننا نحصل من المتباينات (٦) ، (٨) ، (٩) على

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| < (4\sqrt{2}\,S^2 + \sqrt{2}\,SL)\varepsilon.$$

الآن إذا تحددت قيمة العدد الحقيقى الموجب ε بدقة فإننا – بطبيعة الحال – يمكننا مساواة الطرف الأيمن من المتباينة السابقة بأى عدد حقيقى موجب معطى γ ، الأمر الذى يحقق المتباينة (١) . وبهذا الشكل تكون نظرية كوشى – جورساه قد اكتمل برهانها .

٤٩ – النطاقات بسيطة ومتعددة الترابط Simply and Multiply Connected Domains

يقال لنطاق D أنه **بسيط الترابط** **Simply connected** إذا كان كل كفاف مغلق بسيط داخل D لا يحتوى داخله الانقاط من D . ومثال لنطاق بسيط الترابط هو النطاق الداخلى – أى فئة جميع النقط الداخلية – لكفاف مغلق بسيط . ومن ناحية أخرى فالمنطقة الحلقية الواقعة بين دائرتين متحدتى المركز ، تعطينا مثالا لنطاق ليس بسيط الترابط . وإذا لم يكن النطاق بسيط الترابط فإنه يسمى **نطاق متعدد الترابط** **Multiply connected domain** .

يمكننا لنا الآن صياغة نظرية كوشى – جورساه على الصورة المرادفة البديلة التالية

إذا كانت f دالة تحليلية لجميع نقاط نطاق بسيط الترابط D ، فإنه لكل كفاف مغلق بسيط C داخل D يكون

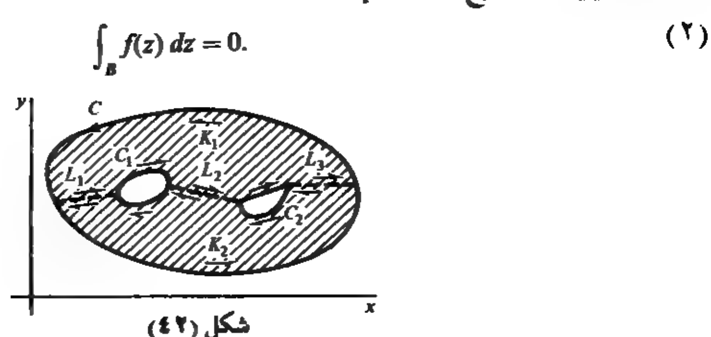
$$\int_C f(z)\,dz = 0. \qquad (١)$$

وتجدر الإشارة إلى أنه يمكننا استبدال الكفاف المغلق البسيط فى نص هذه النظرية ، نظرية كوشى – جورساه ، بكفاف اختيارى مغلق آخر لا يشترط فيه أن يكون بسيطا بالضرورة . فمثلا إذا كان C كفافا مغلقا يقطع نفسه عدداً محدوداً فقط من المرات ، فإنه يمكن اعتبار C مكونا من عدد محدود من كفافات مغلقة بسيطة وبتطبيق نظرية كوشى – جورساه على كل منها فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة . كما أنه يمكن لجزء من C أن يعبر مرتين فى اتجاهين متعاكسين وذلك لأن التكاملين بطول هذا الجزء وفى هذين الاتجاهين المتعاكسين لهما قيمتان متساويتان ومختلفتان فى الاشارة . والحالات الدقيقة والتى تحتاج إلى معالجة حاذقة تنشأ عندما يكون عدد تقاطعات الكفاف المغلق لنفسه عدداً لا نهائيا[١]

من الممكن صياغة نظرية كوشى – جورساه فى الصورة المعدلة الآتية

نظرية : ليكن C كفافا مغلقا بسيطا وليكن C_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ عدداً محدوداً من الكفافات المغلقة البسيطة المرسومة فى المنطقة الداخلية للكفاف C والتى لا توجد بين مناطقها الداخلية نقاط مشتركة . ولتكن R منطقة مكونة من جميع النقط داخل وعلى C وذلك فيما عدا النقط الداخلية لكل من الكفافات C_j (شكل (٤٢)) . ولتكن B الحدود الكاملة الموجهة للمنطقة R والمكونة من C وجميع C_j مأخوذة فى مسار تكون فيه نقط R دائماً على يسار B . إذا كانت f تحليلية عند جميع نقط R فإن

$$\int_B f(z)\,dz = 0. \qquad (٢)$$



شكل (٤٢)

لبرهان هذه النتيجة ، نكون مساراً مضلعيا L_1 مكونا من عدد محدود من القطع المستقيمة متصلة ببعضها نهاية بنهاية وذلك لربط الكفاف الخارجى C بالكفاف الداخلى

---

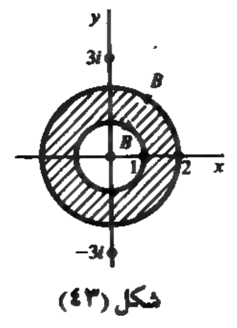
(١) لبرهان النظرية السابقة للحالات التى تشتمل على مسارات أعم من التى تناولها هنا ، انظر على سبيل المثال البنود (٦٣) ، (٦٤) ، (٦٥) من المجلد الأول لكتاب ماركو سوشفتش Markushevich المذكور فى ملحق(١) فى آخر هذا الكتاب .

C_1 ، ثم نكون مساراً مضلعيا آخر L_2 ليربط الكفاف C_1 بالكفاف C_2 ؛ ونستمر بنفس الطريقة حتى نصل لرسم مسار مضلعى L_{n+1} يربط الكفافين C_n و C . الأسهم – باتجاهاتها – المبينة فى شكل (٤٢) تمكننا من تكوين كفافين بسيطين مغلقين K_2, K_1 كل منهما يتكون من مسارات مضلعية L_j أو L_j – وأجزاء من كل من C_j, C ، وبحيث يكون مسار كل منهما فى اتجاه تكون فيه النقاط الداخلية له دائماً على يسار المسار . ووفقاً لهذا فإنه يمكننا الآن تطبيق نظرية كوشى – جورساه على الدالة f على كل من K_2, K_1 على حدة ، وعليه يكون مجموع التكاملين على هذين الكفافين مساويا للصفر . ولما كان التكاملان فى اتجاهين متعاكسين بطول المسار L_j لهما قيمتان متساويتان ومختلفتان فى الاشارة ، فإن ما يتبقى لدينا فى النهاية هو التكامل على المسار B فقط ونكون بذلك قد برهنا المعادلة (٢) .

لتوضيح هذه النظرية ، نلاحظ أن

$$\int_B \frac{dz}{z^2(z^2+9)} = 0$$

حيث B هو الدائرة $|z| = 2$ موجهة فى الاتجاه الموجب ، بالإضافة إلى الدائرة $|z| = 1$ موجهة فى الاتجاه السالب (شكل (٤٣)) . المكامل دالة تحليلية لجميع النقط فيما عدا عند $z = 0$ و $z = \pm 3i$ وهذه النقط الثلاث تقع جميعا خارج المنطقة الحلقية التى حدودها B .



شكل (٤٣)

٥٠ – التكاملات غير المحددة Indefinite Integrals

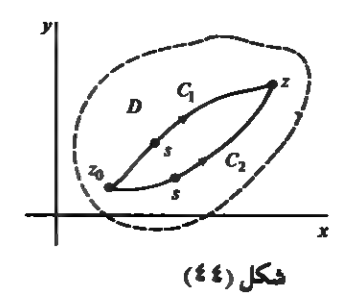
لتكن z, z_0 نقطتين فى نطاق بسيط الترابط D ، ولنفرض أن f دالة تحليلية عند جميع نقط D (شكل (٤٤)) . إذا كان C_2, C_1 كفافين يربطان z, z_0 ويقع كل منهما بأكمله داخل D، فإن C_2, C_1 – يكونان معاً كفافا مغلقا . وحيث أن نظرية كوشى – جورساه يمكن تطبيقها على أى كفاف مغلق فى نطاق بسيط الترابط ، فإننا نجد أن

$$\int_{C_1} f(s)\,ds - \int_{C_2} f(s)\,ds = 0,$$

حيث s تمثل نقاطا على C_2, C_1 . ومن هذا نرى أن التكامل من z_0 إلى z لا يعتمد على

الكفاف المأخوذ طالما كان هذا الكفاف يقع بأكمله داخل D ، وبهذا الشكل يعرف لنا هذا التكامل دالة F على المنطقة البسيطة الترابط D :

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\, ds. \qquad (١)$$



شكل (٤٤)

نبرهن الآن أن مشتقة F(z) لها وجود وتساوى f(z) . لتكن $z + \Delta z$ أى نقطة لا تساوى z وتقع فى جوار ما للنقطة z يقع بأكمله داخل D (شكل (٤٥)) . إذن

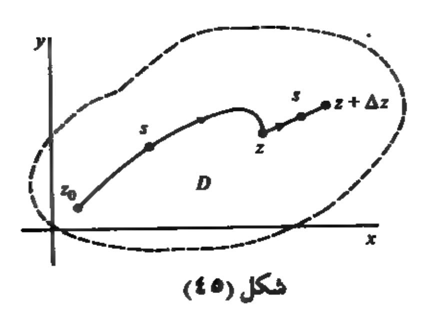
$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)\, ds - \int_{z_0}^{z} f(s)\, ds$$
$$= \int_{z}^{z+\Delta z} f(s)\, ds$$

مع مراعاة أنه يمكن لنا اختيار مسار التكامل من z إلى $z + \Delta z$ ليكون قطعة مستقيمة . وحيث أنه يمكننا كتابة (تمرين (١٣) بند (٤٥))

$$f(z) = \frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} ds = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\, ds,$$

فإننا نجد أن

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]\, ds.$$



شكل (٤٥)

لكن حيث أن f متصلة عند النقطة z ، فإنه لكل عدد موجب ε ، يوجد عدد موجب

δ بحيث

$$|f(s)-f(z)|<\varepsilon$$

طالما كان $|s-z|<\delta$. وبالتالى فإذا كانت النقطة $z+\Delta z$ قريبة قربا كافيا من z بحيث $|\Delta z|<\delta,$ ، فإن

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\frac{1}{|\Delta z|}\,\varepsilon|\Delta z|=\varepsilon;$$

أى أن

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z).$$

وعليه فإن مشتقة التكامل (١) لها وجود عند كل نقطة z فى D ويكون

$$F'(z)=f(z). \qquad (٢)$$

وعليه فإن **التكامل المحدد لدالة تحليلية هو دالة تحليلية متغيرها هو الحد العلوى لهذا التكامل** ، وذلك بشرط أن يكون مسار التكامل مقصوراً على نطاق بسيط الترابط وبحيث تكون الدالة المكاملة دالة تحليلية على هذا النطاق بأكمله .

نلاحظ من التكامل (١) أن قيمة $F(z)$ تزداد (أو تنقص) بمقدار عدد ثابت وذلك عند استبدال الحد السفلى z_0 لهذا التكامل بعدد ثابت آخر . فى هذه الحالة تسمى الدالة $F(z)$ **تكاملا غير محدد An indefinite integral**، أو **دالة مشتقة مقابلة Antiderivative** ، ويعبر عن ذلك بأن نكتب

$$F(z)=\int f(z)\,dz.$$

ومعنى هذا أن $F(z)$ دالة تحليليةمشتقتها $f(z)$. وعلى ضوء المعادلة (١) فإن **أى تكامل محدد يمكن حسابه على أنه التغير الحادث فى قيمة تكامل غير محدد** ، وهى خاصية مطابقة لنظيرتها بالنسبة للدوال الحقيقية لمتغير حقيقى ؛ أى أن

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(z)\,dz=\int_{z_0}^{\beta}f(z)\,dz-\int_{z_0}^{\alpha}f(z)\,dz=F(\beta)-F(\alpha)=F(z)\Big]_{\alpha}^{\beta}. \qquad (٣)$$

ومفهوم بطبيعة الحال أننا سنظل متفقين على أن مسارات التكامل ستكون مقصورة على نطاق بسيط الترابط تكون فيه f تحليلية .

يجب ملاحظة أنه إذا كانت $G(z)$ دالة تحليلية بخلاف $F(z)$ بحيث $G'(z)=f(z)$ فإن مشتقة الدالة $H(z)=F(z)-G(z)$ هى الصفر . وعليه فإذا كانت $H(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ فإننا نحصل على

$$u_x(x,y)+iv_x(x,y)=0;$$

مما يعنى أن $u_x(x,y)=v_x(x,y)=0$ على النطاق بأكمله الذى تكون فيه كل من G,F تحليلية . وعلى ضوء معادلتى كوشى–ريمان فإن $u_y(x,y)=v_y(x,y)=0$ مما يعنى أن الدوال

$v(x,y)$ و $u(x,y)$ دوال ثابتة . ومن هذا نخلص إلى أن H(z) دالة ثابتة ، وذلك يستتبع بالتالى أن الفرق بين G(z), F(z) هو عدد مركب ثابت . ونتيجة لذلك فإن أى تكامل غير محدد للدالة f(z) يمكن أن يقوم مقام الدالة F(z) فى المعادلة (٣) .

وعلى سبيل المثال فإن الدالة الشاملة $F(z) = z^3/3$ هى تكامل غير محدد للدالة $f(z) = z^2$. وحيث أن z^2 دالة شاملة فإنه يمكننا كتابة

$$\int_0^{1+i} z^2\,dz = \tfrac{1}{3}z^3\Big]_0^{1+i} = \tfrac{1}{3}(1+i)^3$$

لأى كفاف واصل بين النقطتين $z=0$ و $z = 1+i.$

وكمثال آخر ، دعنا نحسب قيمة التكامل

$$\int_{-1}^{1} z^{1/2}\,dz \tag{٤}$$

حيث

$$z^{1/2} = \sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2} \qquad (r>0, 0<\theta<2\pi) \tag{٥}$$

وأن الكفاف الواصل بين حدى التكامل المحدد يقع أعلى المحور الحقيقى للمستوى المركب z . هذه الدالة ليست تحليلية عند نقط الشعاع $\theta = 0$ ، وعلى وجه التخصيص فإنها غير تحليلية عند $z = 1$. إلا أننا من الناحية الأخرى نرى أن الفرع

$$f(z) = \sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2} \qquad \left(r>0, -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}\right),$$

للدالة $z^{1/2}$ المتعددة القيم يكون تحليليا عند كل نقطة فيما عدا نقط الشعاع $\theta = -\pi/2$ ، وتكون قيم الدالة f(z) فوق المحور الحقيقى مطابقة لنظائرها بالنسبة للدالة المعطاة فى (٥) . وبالتالى فإنه يمكن إحلال الدالة المكاملة بالدالة f(z) . والآن فإن

$$\tfrac{2}{3}z^{3/2} = \tfrac{2}{3}r^{3/2}\exp\frac{i3\theta}{2} \qquad \left(r>0, -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}\right)$$

يكون تكاملا غير محدد للدالة f(z) ؛ وعليه فإن

$$\int_{-1}^{1} z^{1/2}dz = \tfrac{2}{3}(e^0 - e^{i3\pi/2}) = \tfrac{2}{3}(1+i).$$

التكامل (٤) تكون له قيمة أخرى ، إذا أخذ على كفاف يقع أسفل المحور الحقيقى ، وهنا يمكننا استبدال المكامل بالفرع

$$g(z) = \sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2} \qquad \left(r>0, \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5\pi}{2}\right)$$

مع ملاحظة أن قيمه فى النصف السفلى للمستوى تكون مساوية لنظائرها بالنسبة للدالة (٥) . وحيث أن الدالة التحليلية

$$\tfrac{2}{3}z^{3/2} = \tfrac{2}{3}r^{3/2}\exp\frac{i3\theta}{2} \qquad \left(r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}\right)$$

هى تكامل غير محدد للدالة g(z) ، فإننا نحصل على

$$\int_{-1}^{1} z^{1/2}\,dz = \tfrac{2}{3}(e^{i3\pi} - e^{i3\pi/2}) = \tfrac{2}{3}(-1 + i).$$

الآن فإن تكامل الدالة (٥) مأخوذا فى الاتجاه الموجب حول كفاف مغلق بسيط يتكون من مسارين أحدهما من النوع الثانى (الأخير) والآخر من النوع الأول تكون له القيمة الآتية :

$$\tfrac{2}{3}(-1 + i) - \tfrac{2}{3}(1 + i) = -\tfrac{4}{3}.$$

تمارين

١ - حدد فى كل حالة من الحالات التالية النطاق الذى تكون فيه الدالة f تحليلية ثم طبق نظرية كوشى - جورساه لإثبات أن

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

وذلك عندما يكون الكفاف المغلق البسيط C هو الدائرة $|z| = 1$ وعندما

(أ) $f(z) = \dfrac{z^2}{z-3}$ ؛ (ب) $f(z) = ze^{-z}$ ؛ (جـ) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 2}$ ؛

(د) $f(z) = \operatorname{sech} z$ ؛ (هـ) $f(z) = \tan z$ ؛ (و) $f(z) = \operatorname{Log}(z + 2)$.

٢ - لتكن B هى حدود المنطقة المحدودة بالدائرة $|z| = 4$ والمربع الذى تكون أضلاعه منطبقة على المستقيمات $x = \pm 1, y = \pm 1$. إذا أخذنا اتجاه مسار B بحيث تقع المنطقة دائماً على يساره فبين لماذا يكون

$$\int_B f(z)\,dz = 0$$

لكل من الحالات الآتية :

(أ) $f(z) = \dfrac{1}{3z^2 + 1}$ ؛ (ب) $f(z) = \dfrac{z+2}{\sin(z/2)}$ ؛ (جـ) $f(z) = \dfrac{z}{1 - e^z}$.

٣ - ليكن C كفاف مغلق بسيط فى داخليه كفاف مغلق بسيط C_0 ، حيث كل من C_0, C موجها فى الاتجاه الموجب . إذا كانت f دالة تحليلية فى المنطقة المغلقة المحدودة بهذين الكفافين ، برهن أن

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_0} f(z)\,dz.$$

٤ - استخدم نتائج تمرين (٣) من هذا البند وتمرين (١٦) من بند (٤٥) لإثبات أن

$$\int_C \frac{dz}{z - 2 - i} = 2\pi i, \qquad \int_C (z - 2 - i)^{n-1}\,dz = 0 \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

حيث C هو حد المستطيل $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2$ موجها فى الاتجاه الموجب

٥ – استخدم تكاملاً غير محدد لإثبات أن

$$\int_C z^n\, dz = \frac{1}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$ و

حيث C أى كفاف يصل النقطتين α و β

٦ – أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية عندما يكون مسار التكامل كفافاً اختيارياً واصلا بين حدى التكامل لكل من هذه التكاملات

(أ) $\int_i^{i/2} e^{\pi z}\, dz$ ؛ (ب) $\int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}\, dz$ ؛ (جـ) $\int_1^3 (z-2)^3\, dz.$

الأجوبة : (أ) $(1+i)/\pi$ ؛ (ب) $e + 1/e$ ؛ (جـ) صفر

٧ – إذا كان $z_1 \neq z_2$ $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0,$ فاثبت أن $\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}$

وذلك طالما كان مسار التكامل هو داخليه نطاق بسيط الترابط لا يحتوى نقطة الأصل .

استخدم هذه النتيجة لبرهان أن

$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 0.$$

لأى كفاف مغلق بسيط C تكون فيه نقطة الأصل إما نقطة داخلية أو نقطة خارجية لهذا الكفاف .

٨ – لتكن z_2, z_1, z_0 ثلاث نقاط مختلفة من نقاط نطاق بسيط الترابط D . بفرض أن كلا من f(z) ومشتقتها $f'(z)$ دالة تحليلية عند جميع نقط D فيما عدا عند النقطة z_0 ، عمم النتيجة المعطاة فى تمرين (٧) لبرهان أنه لكل كفاف داخل D واصل بين النقطتين z_2, z_1 وغير مار بالنقطة z_0 يكون

$$\int_{z_1}^{z_2} f'(z)\, dz = f(z_2) - f(z_1);$$

ومن ثم استنتج أن $\int_C f'(z)\, dz = 0$ لأى كفاف مغلق بسيط C داخل D وغير مار بالنقطة z_0 .اعط أمثلة لمثل هذه الدوال والنطاقات.

٩ – استخدم تكاملا غير محدد لايجاد قيمة التكامل

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z}$$

بالنسبة لأى كفاف يقع فى النصف الأيمن للمستوى المركب وواصل بين النقطتين $z = 2i, z = -2i$. لاحظ أن الفرع الرئيسى Log z هو تكامل غير محدد تحليلى عند جميع نقط نصف المستوى $x \geqq 0$ فيما عدا عند نقطة الأصل وذلك بالنسبة للدالة $1/z$.

١٠ – حل التمرين السابق (٩) لأى كفاف لا يمس الجزء غير السالب من المحور الحقيقى .

الإجابة : $-\pi i$

١١ لاحظ أن الدالة وحيدة القيم $f(z) = z^{1/2} = \sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2} \quad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} \leqq \theta < \frac{3\pi}{2}\right),$

وحيث $f(0) = 0$ ، هى دالة متصلة لجميع نقط نصف المستوى $r \geqq 0, 0 \leqq \theta \leqq \pi$. إذا كان

C موجها فى الاتجاه الموجب هو حد نصف القرص $0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \pi$ ، برهن أن
$$\int_C f(z)\, dz = 0$$
وذلك بحساب تكاملات f(z) على نصف الدائرة وكذلك على كل من نصفى القطرين المنطبقين على محور السينات . اذكر لماذا لا يمكننا استخدام نظرية كوشى - جورساه فى هذه الحالة ؟

١٢ - الفترات المتداخلة أوالمعششة Nested Intervals . نكون متابعة لا نهائية من الفترات المغلقة $a_n \leqq x \leqq b_n \ (n=0,\ 1, 2, \ldots)$ بواسطة قاعدة لاختيار نصف فترة معلومة . نختار الفترة $a_1 \leqq x \leqq b_1$ لتكون أحد النصفين الأيمن أو الأيسر للفترة الأولى المعطاة $a_0 \leqq x \leqq b_0$، ونختار الفترة $a_2 \leqq x \leqq b_2$ لتكون أحد نصفى الفترة $a_1 \leqq x \leqq b_1$ ، وهكذا . برهن أنه توجد نقطة x_0 مشتركة بين جميع الفترات المغلقة .

اقتراح : لاحظ أن النقط a_n تمثل متابعة غير تناقصية من الأعداد وذلك لأن $a_0 \leqq a_n \leqq a_{n+1} < b_0$ وعليه فإن لهذه المتابعة نهاية A عندما تؤول n إلى ∞. برهن أن المتابعة المكونة من النقط b_n لها أيضاً نهاية B ، ثم بين أن $A = B = x_0$.

١٣ - المربعات المتداخلة أو المعششة Nested squares. المربع $\sigma_0\colon\ a_0 \leqq x \leqq b_0,\ \ c_0 \leqq y \leqq d_0,$ حيث $b_0 - a_0 = d_0 - c_0$ يقسم إلى أربعة مربعات متساوية برسم خطوط موازية للمحورين. نختار أحد هذه المربعات :
$\sigma_1\colon a_1 \leqq x \leqq b_1,\ c_1 \leqq y \leqq d_1,$ حيث $b_1 - a_1 = d_1 - c_1$ ،
وفقا لقاعدة معطاة نستخدمها لاختيار المربع $\sigma_2,$ بتقسيم المربع σ_1 بنفس الطريقة وهكذا (انظر بند (٤٧)) . برهن أنه توجد نقطة (x_0, y_0) تنتمى لجميع المناطق المغلقة المكونة للمتابعة اللانهائية $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots.$

اقتراح : استخدم نتائج تمرين (١٢) لكل من متابعتى الفترات المغلقة
$a_n \leqq x \leqq b_n$ و $c_n \leqq y \leqq d_n\ (n=0,1,2,\ldots)$

٥١ - صيغة تكامل كوشى The Cauchy Integral Formula

نعطى الآن نتيجة أساسية أخرى :

نظرية : لتكن f دالة تحليلية عند جميع النقط داخل وعلى كفاف بسيط مغلق C وموجها فى الاتجاه الموجب . إذا كانت z_0 داخلية للكفاف C ، فإن

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\, dz}{z - z_0}. \qquad (1)$$

تسمى الصيغة (١) صيغة تكامل كوشى ، وهى تنص على أنه إذا كانت f دالة تحليلية داخل وعلى كفاف مغلق بسيط C ، فإن قيم f داخل C تتحدد تماماً بواسطة قيم f على

C . وعليه فإن أى تغير فى قيم f عند نقطة داخل C يصاحبه بالضرورة تغير فى قيمة f المناظرة على الحد C .

لتوضيح فائدة الصيغة (١) فى إيجاد قيم التكاملات ، سنبين أن

$$\int_C \frac{z\,dz}{(9-z^2)(z+i)} = \frac{\pi}{5}$$

حيث C هو الدائرة $|z| = 2$ موجهة فى الاتجاه الموجب . وحيث أن الدالة $f(z) = z/(9-z^2)$ تحليلية داخل وعلى C، فإنه يمكننا استخدام صيغة تكامل كوشى لهذه الدالة بأخذ $z_0 = -i$. وعليه فإن قيمة التكامل المعطى هى $2\pi i f(-i), = \pi/5$.

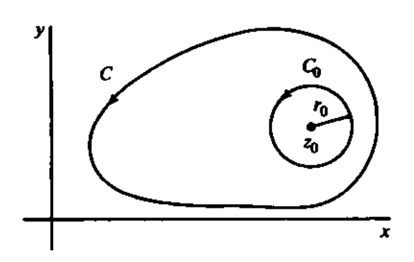
لبرهان النظرية سنعتبر دائرة C_0 :

$$|z - z_0| = r_0$$

مركزها z_0 ونصف قطرها r_0 صغيرا ما أمكن ليضمن لنا وجود C_0 فى داخلية C (شكل (٤٦)) . الدالة $f(z)/(z-z_0)$ تحليلية عند جميع النقط داخل وعلى C وذلك فيما عدا عند النقطة z_0 . إذن باستخدام نظرية كوشى - جورساه للمناطق المتعددة الترابط فإن تكامل هذه الدالة حول حد المنطقة بين C_0, C تكون مساوية للصفر (بند (٤٩)) ، وعليه فإن

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = \int_{C_0} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0},$$

حيث كلا من التكاملين مأخوذ فى الاتجاه الموجب .



شكل (٤٦)

وحيث أن تكاملى الدالة $f(z)/(z-z_0)$ حول C_0, C متساويان فإننا نحصل على

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = f(z_0)\int_{C_0} \frac{dz}{z-z_0} + \int_{C_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz. \qquad (٢)$$

لاحظ أن $z - z_0 = r_0 e^{i\theta}$ على C_0 . وباستخدام تمرين (١٦) من بند (٤٥) نحصل على

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i. \qquad (٣)$$

سنبرهن الآن أن قيمة التكامل الأخير فى المعادلة (٢) تكون مساوية للصفر . حيث أن f متصلة عند z_0 فإنه يوجد لكل عدد حقيقى موجب ε عدد حقيقى موجب δ بحيث

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \qquad \text{طالما} \qquad |z - z_0| < \delta. \tag{٤}$$

نختار الآن عدداً حقيقياً موجبا γ أصغر من δ وصغيرا صغراً كافيا بحيث تقع الدائرة $|z - z_0| = \gamma$ فى داخلية C . لاحظ أن المتطابقة اليمنى فى (٤) متحققة لكل نقطة z من نقط الدائرة . لاحظ الآن أن قيمة التكامل الأخير فى المعادلة (٢) لا تعتمد على اختيارنا لنصف القطر r_0 وذلك لأن قيمة كل من التكاملين الآخرين للمعادلة (٢) لا تعتمد على هذا الاختيار . من هذه الحقيقة يحق لنا اختيار r_0 بحيث $r_0 = \gamma$ باستخدام خاصية (٩) من بند (٤٤) ومع ملاحظة أن طول C_0 هو الآن $2\pi\gamma$ نحصل على

$$\left|\int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz\right| < \frac{\varepsilon}{\gamma} 2\pi\gamma = 2\pi\varepsilon,$$

وذلك لأن القيمة المطلقة للدالة المكاملة هنا أقل من ε/γ . وبالتالى فإن القيمة المطلقة للتكامل الأخير من المعادلة (٢) يمكن جعله أصغر من أى عدد حقيقى موجب نشاء وهذا يعنى أن قيمة هذا التكامل لابد وأن تساوى الصفر .

المعادلة (٢) تؤول إذن إلى

$$\int_C \frac{f(z)\, dz}{z - z_0} = f(z_0) 2\pi i,$$

وبذلك نكون قد استكملنا برهان النظرية .

٥٢ مشتقات الدوال التحليلية Derivatives of Analytic Functions

فى هذه المرحلة أصبح بإمكاننا برهان أنه إذا كانت f دالة تحليلية عند نقطة ما ، فإن مشتقات f من جميع الرتب لها وجود عند هذه النقطة وأن كل مشتقة من هذه المشتقات تكون تحليلية عند هذه النقطة .

سنفرض أولا أن f دالة تحليلية داخل وعلى كفاف مغلق بسيط C ، ونفرض أن z نقطة ما داخل C . إذا كان s يرمز لنقاط الكفاف C فإن صيغة كوشى للتكامل :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)\, ds}{s - z}, \tag{١}$$

ستمكننا من إثبات أن مشتقة f عند z لها التمثيل التكاملى

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)\, ds}{(s - z)^2}. \tag{٢}$$

لاحظ أن الصيغة (٢) يمكن الحصول عليها صوريا – وليس استنباطيا – من (١) وذلك بأخذ مشتقة الدالة المكاملة فى (١) بالنسبة للمتغير z . ولإثبات الصيغة (٢) نلاحظ أنه وفقاً للصيغة (١) يكون

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{1}{s-z-\Delta z}-\frac{1}{s-z}\right)\frac{f(s)}{\Delta z}\,ds$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)\,ds}{(s-z-\Delta z)(s-z)}.$$

الآن نستخدم خاصية اتصال f على C لنبرهن أن هذا التكامل الأخير يؤول إلى التكامل

$$\int_C\frac{f(s)\,ds}{(s-z)^2}$$

وذلك عندما يؤول Δz إلى الصفر . وهذا يعنى أن مقياس الفرق بين هذين التكاملين :

$$\left|\Delta z\int_C\frac{f(s)\,ds}{(s-z)^2(s-z-\Delta z)}\right|.$$

يؤول إلى الصفر باقتراب Δz من الصفر . لتكن M هى القيمة العظمى لقيم $|f(s)|$ على C وليكن L طول C . إذا كانت d أصغر مسافة بين z وبين أى نقطة على C وكان $|\Delta z|<d$ فإن

$$\left|\Delta z\int_C\frac{f(s)\,ds}{(s-z)^2(s-z-\Delta z)}\right|<\frac{|\Delta z|ML}{d^2(d-|\Delta z|)},$$

والكسر الأيمن فى هذه المتباينة يؤول إلى الصفر عندما يؤول Δz إلى الصفر ، وعليه فإن

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)\,ds}{(s-z)^2};$$

وهذا يبرهن الصيغة (٢) .

باستخدام نفس الطريقة التى استخدمت لبرهان الصيغة (٢) فإننا نجد أن

$$f''(z)=\frac{1}{\pi i}\int_C\frac{f(s)\,ds}{(s-z)^3}. \qquad (٣)$$

ولتبيان ذلك نلاحظ أن الصيغة (٢) تعطى

$$\frac{f'(z+\Delta z)-f'(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\frac{1}{(s-z-\Delta z)^2}-\frac{1}{(s-z)^2}\right]\frac{f(s)\,ds}{\Delta z}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{2(s-z)-\Delta z}{(s-z-\Delta z)^2(s-z)^2}f(s)\,ds.$$

وحيث أن f متصلة على C فإنه يمكننا استخدام نفس الطريقة السابقة لإثبات أن هذا التكامل الأخير يؤول إلى التكامل

$$2\int_C \frac{f(s)\,ds}{(s-z)^3},$$

عندما يؤول Δz إلى الصفر ، وهذا يبرهن الصيغة (٣) .

الصيغة (٣) تبرهن وجود المشتقة الثانية للدالة f عند أى نقطة z فى داخلية C . وفى الواقع فإن الصيغة (٣) تعطى لنا أكثر من ذلك ، ونعنى بذلك أنه إذا كانت f تحليلية عند نقطة ما فإن مشتقتها تكون أيضاً تحليلية عند نفس النقطة . ولتوضيح ذلك نقول إنه إذا كانت f تحليلية عند z ، فإنه توجد بالضرورة دائرة مركزها z بحيث تكون f تحليلية عند جميع النقط داخل وعلى هذه الدائرة . ووفقا للصيغة (٣) فإن $f''(z)$ لها وجود عند أى نقطة داخلية لهذه الدائرة ، وهذا يعنى أن مشتقة f تحليلية عند z .

باستخدام نفس البرهان السابق على الدالة $f'(z)$ بدلا من $f(z)$ فإنه يمكننا إثبات أن $f''(z)$ تحليلية وهكذا ؛ وبهذا الشكل نكون قد برهنا النظرية الأساسية الآتية :

نظرية : أى دالة تحليلية عند نقطة ما لها مشتقات تحليلية من جميع الرتب عند هذه النقطة

حيث أن $f'(z)$ تحليلية ، وبالتالى متصلة ، وحيث أن

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y),$$

فإننا نستنتج أن المشتقات الأولى للدالتين v,u دوال متصلة . وحيث أن $f''(z)$ تحليلية ، وبالتالى متصلة ، وحيث أن

$$f''(z) = u_{xx}(x,y) + iv_{xx}(x,y) = v_{yx}(x,y) - iu_{yx}(x,y),$$

وهكذا ، فإن المشتقات الجزئية من جميع الرتب للدالتين v,u دوال متصلة عند أى نقطة تكون عندها f تحليلية . وقد سبق لنا وأن تعرضنا لهذه النتيجة بالنسبة للمشتقات الجزئية الأولى والثانية عندما تعرضنا لدراسة الدوال التوافقية فى بند (٢٠) .

الأفكار التى استخدمت فى برهان الصيغتين (٢) ، (٣) يمكن استخدامها تتابعيا للحصول على صيغة تكاملية لأى مشتقة ذات أى رتبة نشاء . وفى الحقيقة فإن الاستنتاج الرياضى يعطى الصيغة العامة الآتية :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)\,ds}{(s-z)^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (٤)$$

وذلك لأن الصيغة قد برهنت عندما $n = 1$ ، وبافتراض صحة هذه الصيغة لأى عدد صحيح موجب معين $n = k$ ، فإنه يمكننا استخدام نفس الطريقة السابقة لإثبات صحة الصيغة عندما $n = k + 1$. وسنترك للقارىء أداء تفصيلات البرهان ، مع افتراضنا بأن يبقى الفرق $s - z$ كوحدة واحدة وذلك أثناء إجراء عمليات

التبسيط الجبرية .

إذا اتفقنا على أن يكون $f^{(0)}(z_0)$ دالاً على $f(z_0)$ و $0! = 1$ فإنه يمكننا أن نكتب

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (٥)$$

والتى تعطى صيغة تكامل كوشى عندما تكون n مساوية للصفر ، وتعطى أيضاً الصيغة (٤) – مع اختلاف طفيف فى الرموز المستخدمة – وذلك عندما $n = 1, 2, \ldots$.

وكتطبيق للصيغة (٥) ، نلاحظ أنه إذا كانت $f(z) = 1$ ، فإن

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \qquad \int_{C_0} \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

حيث C_0 هى الدائرة التى مركزها z_0 ونصف قطرها r_0 موجهة فى الاتجاه الموجب (انظر تمرين (١٦) من بند (٤٥)) .

الصيغة (٥) ، وصيغة تكامل كوشى على وجه التخصيص ، يمكن تعميمها لتشمل الحالة التى يستبدل فيها الكفاف المغلق البسيط C بالحد الموجه B لنطاق متعدد الترابط على شاكلة النطاق الذى اعتبرناه فى نظرية بند (٤٩) . وهذه الحالة المعممة يمكن برهانها إذا كانت z_0 نقطة داخلية للنطاق وكانت f تحليلية فى المنطقة المكونة من النطاق وحده B .

٥٣ – نظرية موريرا Morera's Theorem

فى بند (٥٠) برهنا أن مشتقة الدالة

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds \qquad (١)$$

لها وجود عند كل نقطة من نقاط أى نطاق بسيط الترابط D تكون فيه f(z) تحليلية . وفى الحقيقة فإن

$$F'(z) = f(z).$$

ورغم أننا افترضنا أن الدالة f تحليلية فى D ، فإننا لم نستخدم فى البرهان إلا خاصية اتصال f بالإضافة إلى الشرط بأن تكامل f حول أى كفاف مغلق بسيط فى داخلية D يكون مساويا للصفر . وعليه ، فإن توفر هاتين الخاصيتين فقط للدالة f ، يمكننا من برهان أن F تحليلية فى D وبأن $F'(z) = f(z)$، من ذلك نتبين أن f تحليلية فى D وذلك لكونها مشتقة دالة تحليلية (بند (٥٢)) . وبهذا نكون قد برهنا نظرية منسوبة إلى إ . موريرا E. Morera (١٨٥٦ – ١٩٠٩) والتى تنص على :

نظرية : إذا كانت f دالة متصلة عند جميع نقط نطاق بسيط الترابط D وكان لكل كفاف مغلق بسيط C داخل D ،

$$\int_C f(z)\, dz = 0, \qquad (٢)$$

فإن f تكون تحليلية عند جميع نقط D .

نظرية موريرا تزودنا بمعكوس لنظرية كوشى – جورساه .

يمكننا تعميم نظرية موريرا لأى نطاق اختيارى D يتحقق معه الشرط (٢) بالنسبة لأى كفاف بسيط مغلق تقع داخليته أيضاً فى داخلية D . وذلك لأنه إذا كانت z_0 نقطة فى D فإنه يوجد جوار $|z - z_0| < \varepsilon$ فى D ، وفى هذه الحالة يمكننا تطبيق نظرية موريرا على الجوار ε لنبين أن f تحليلية عند z_0 ؛ وعليه فإن الدالة f تكون تحليلية عند جميع نقط D .

٥٤ – القيم العظمى لمقاييس الدوال Maximum Moduli of Functions

لتكن f دالة تحليلية وغير ثابتة القيمة عند نقط قرص دائرى مفتوح $|z - z_0| < r_0$ مركزه z_0 . إذا كان C هو الدائرة $|z - z_0| = r$ حيث $0 < r < r_0$ ، فإن صيغة تكامل كوشى تعطى

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\, dz}{z - z_0}. \qquad (١)$$

مع مراعاة أن المسار C موجه فى الاتجاه الموجب . إذا اعتبرنا التمثيل البارامترى $z(\theta) = z_0 + re^{i\theta}\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ للدائرة C فإن الصيغة (١) يمكن كتابتها على الصورة

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta. \qquad (٢)$$

الصيغة (٢) تبين أنه إذا كانت لدينا دالة تحليلية داخل وعلى دائرة ما فإن قيمة هذه الدالة عند مركز الدائرة هى الوسط الحسابى لقيم هذه الدالة على محيط الدائرة .

من صيغة (٢) نحصل على المتباينة

$$|f(z_0)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|\, d\theta \qquad (0 \leqq r < r_0), \qquad (٣)$$

وواضح أن الصيغة (٣) صحيحة أيضاً فى الحالة الخاصة التى يكون فيها $r = 0$. ومن الناحية الأخرى إذا افترضنا أن $|f(z)| \leqq |f(z_0)|$ لجميع z التى تحقق $|z - z_0| < r_0$ فإن

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|\, d\theta \leqq |f(z_0)| \qquad (0 \leqq r < r_0). \qquad (٤)$$

من المتباينات (٣) و (٤) نجد أن

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|\, d\theta,$$

أى أن

$$\int_0^{2\pi} [|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{i\theta})|]\, d\theta = 0 \qquad (0 \leqq r < r_0).$$

وحيث أن الدالة المكاملة فى الصيغة الأخيرة دالة متصلة غير سالبة فإننا نستنتج أن
$|f(z_0)| - |f(z_0 + r_0 e^{i\theta})| = 0$ ، أى أن $|f(z)| = |f(z_0)|$
لجميع z المحققة للمتباينة $|z - z_0| < r_0$.لكن هذه النتيجة تعنى أن الدالة f(z) ثابتة القيمة عند جميع نقط النطاق $|z - z_0| < r_0$ (انظر تمرين ٩ (جـ) بند (٢٠)) ، وهذا يخالف ما افترضناه ابتداء من أن f(z) ليست ثابتة القيمة على هذا النطاق . وهذا يعنى أن الفرض القائل بأن $|f(z)| \leqq |f(z_0)|$ لجميع قيم z التى تحقق $|z - z_0| < r_0$
يؤدى إلى تناقض .

ما برهناه أعلاه يعنى أنه **إذا كانت f دالة تحليلية غير ثابتة القيمة فى جوار للنقطة** z_0 ، **فإنه توجد نقطة واحدة z على الأقل فى هذا الجوار بحيث**

$$|f(z)| > |f(z_0)|. \qquad (٥)$$

والنظرية التالية والتى يطلق عليها **قاعدة القيمة العظمى** **Maximum principle** هى إحدى النتائج الهامة للنتيجة السابقة .

نظرية : إذا كانت f دالة تحليلية وليست ثابتة القيمة فى داخلية منطقة ما R ، فإن $|f(z)|$ ليست لها قيمة عظمى فى داخلية R .

وحتى نستكمل برهان قاعدة القيمة العظمى ، فإننا نحتاج إلى نتيجة يمكن استخلاصها بشكل مباشر من نظرية بند (١٠٦) بالباب الثانى عشر . ونعنى بذلك أنه إذا كانت دالة f تحليلية ليست ثابتة القيمة فى داخلية منطقة R ، فإن f لا تكون ثابتة القيمة على أى جوار لأى نقطة فى داخلية R . لنفرض الآن أن $|f(z)|$ لها قيمة عظمى عند النقطة z_0 فى داخلية R . هذا الفرض يعنى أن $|f(z)| \leqq |f(z_0)|$ لجميع نقاط جوار ما للنقطة z_0 ، وهذا يناقض المتباينة (٥) .

إذا كانت f دالة متصلة عند جميع نقط منطقة مغلقة ومحدودة R وكانت f فى نفس الوقت تحليلية عند جميع نقاط داخلية R ، فإن الدالة المتصلة $|f(z)|$ يكون لها قيمة عظمى فى R (بند (١٣)) . وهذا يعنى أنه يوجد عدد حقيقى موجب ثابت M بحيث $|f(z)| \leqq M$ لجميع z فى R وأن التساوى لابد وأن يتحقق عند نقطة واحدة z على الأقل فى R.وإذا كانت f دالة ثابتة القيمة فإن $|f(z)| = M$ لجميع z فى R . أما إذا كانت f ليست ثابتة القيمة فوفقا لقاعدة القيمة العظمى فإن $|f(z)| \neq M$ لجميع النقاط z فى داخلية R
وعليه فإنه **إذا كانت f دالة متصلة عند جميع نقط منطقة مغلقة ومحدودة R وكانت f فى نفس الوقت تحليلية وليست ثابتة القيمة فى داخلية R فإن $|f(z)|$ تأخذ قيمتها العظمى على حدود R وليس عند أى نقطة فى داخلية R .**

خواص القيم الصغرى للدالة $|f(z)|$ وكذلك خواص القيم العظمى والصغرى للدالة التوافقية $u(x,y) = \text{Re}\,[f(z)]$ تعالجها التمارين الموجودة فى نهاية هذا الباب .

إذا كانت f دالة تحليلية فى داخلية وعلى محيط الدائرة $|z - z_0| = r_0$ فإن التمثيل التكاملى لمشتقات f عند z_0 يعطى بالصيغة

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

حيث C_0 هو الدائرة التى مركزها z_0 ونصف قطرها r_0 موجهة فى الاتجاه الموجب . إذا كانت M هى القيمة العظمى للدالة $|f(z)|$ على C_0 فإننا نحصل على متباينة كوشى Cauchy's inequality الآتية

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqq \frac{n!\,M}{r_0^{\,n}} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (٦)$$

وعندما n = 1 فإننا نحصل على الشرط

$$|f'(z_0)| \leqq \frac{M}{r_0} \qquad (٧)$$

وهذه النتيجة تمكننا من برهان أن أى دالة شاملة بخلاف الدالة الثابتة لا يمكن أن تكون دالة محدودة لجميع النقط z ؛ وتعرف هذه النتيجة بنظرية لوافيل والتى نجملها فيما يلى

نظرية لوافيل Liouville's Theorem : أى دالة شاملة ومحدودة لجميع نقاط المستوى المركب لابد وأن تكون دالة ثابتة .

لبرهان ذلك نلاحظ أن الفرض المعطى يستلزم وجود عدد حقيقى ثابت M بحيث $|f(z)| \leqq M$ لجميع z . وعليه فإن المتباينة (٧) تكون صحيحة لأى عدد حقيقى موجب r_0 ولجميع z_0 . وحيث أنه يمكننا اختيار r_0 لتكون كبيرة كما نشاء وحيث أن $f'(z_0)$ عدد ثابت فإن المتباينة (٧) تتحقق فقط عندما يكون $f'(z_0) = 0$. وهذا يعنى أن $f'(z_0) = 0$ لجميع نقاط المستوى المركب ، مما يستلزم أن تكون $f(z)$ دالة ثابتة القيمة.

٥٥ – النظرية الأساسية للجبر The Fundamental Theorem of Algebra

تعرف النظرية التالية بالنظرية الأساسية للجبر

نظرية : أى كثيرة حدود

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0) \text{ و}$$

حيث $n \geqq 1$ لها جذر واحد على الأقل . أى أنه توجد نقطة واحدة z_0 على الأقل بحيث $P(z_0) = 0$.

البرهان الجبرى الصرف لهذه النظرية برهان صعب ، إلا أنه يمكننا استنباطها هنا بشكل مباشر باستخدام نظرية لوافيل المبرهنة فى البند السابق.لنفرض الآن أن $P(z) \neq 0$ عند أى نقطة z فى المستوى المركب . فى هذه الحالة تكون

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

دالة شاملة ومحدودة لجميع z . لتبيان أن هذه الدالة محدودة نلاحظ أولا أن f متصلة وبالتالى فهى محدودة على كل قرص دائرى مغلق مركزه نقطة الأصل . وحيث أنه يوجد أيضاً عدد حقيقى موجب R بحيث

$$|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} < \frac{2}{|a_n| R^n}$$

لجميع النقط z فى خارجية القرص $|z| \leqq R$ (انظر تمرين ١٨ من هذا البند) فإن الدالة f تكون محدودة لجميع قيم z فى المستوى المركب . وباستخدام نظرية لوافيل نستنتج أن f(z) ، وبالتالى P(z) ، دالة ثابتة ، وهذا يناقض أن P(z) ليست ثابتة القيمة .

عادة ما تعطى النظرية الأساسية للجبر فى مناهج الجبر الأولية بدون برهان . ونتيجة هامة للنظرية الأساسية للجبر تنص على أن أى كثيرة حدود من درجة $n \geqq 1$ يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب كثيرات حدود خطية (أى كثيرات حدود من الدرجة الأولى) ؛ أى أن

$$P(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

حيث c ، z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ أعداد مركبة ثابتة . بحسب النظرية الأساسية للجبر يوجد عدد مركب z_1 بحيث $P(z_1) = 0$ ؛ وعليه وباستخدام تمرين (١٩) من هذا البند فإن كثيرة الحدود P(z) تقبل القسمة (بدون باق) على $z - z_1$ بمعنى أن

$$P(z) = (z - z_1)Q(z)$$

حيث $Q(z)$ كثيرة حدود من درجة $n - 1$. وهنا يمكننا استكمال البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضى .

من هذه النتيجة نرى أن عدد الأصفار (أى الجذور) المختلفة لأى كثيرة حدود فى المستوى المركب ومن درجة n ، حيث $n \geqq 1$ ، لا يتعدى n (فى الواقع عدد أصفار كثيرة الحدود أيضاً لا يتعدى n : المترجمان) .

تمـاريــــن

١ - ليكن C هو الدائرة $|z| = 3$ موجها فى الاتجاه الموجب . برهن أنه إذا كان

$$g(z) = \int_C \frac{2s^2 - s - 2}{s - z}\, ds \qquad (|z| \neq 3)$$

فإن $g(2) = 8\pi i$. ما هى قيمة $g(z)$ عندما $|z| > 3$ ؟

٢ ليكن C كفاف مغلق بسيط موجها فى الاتجاه الموجب . برهن أنه إذا كان

$$g(z) = \int_C \frac{s^3 + 2s}{(s-z)^3}\, ds$$

فإن $g(z) = 6\pi iz$ إذا كانت z فى داخلية C وبأن $g(z) = 0$ إذا كانت z فى خارجية C.

٣ ليكن C هو حدود المربع الذى تنطبق أضلاعه على المستقيمات $y = \pm 2,\ x = \pm 2$. إذا كان C موجها دائماً فى الاتجاه الموجب ، فأوجد قيمة كل من التكاملات الآتية :

(أ) $\int_C \frac{e^{-z}\, dz}{z - \pi i/2}$ (ب) $\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\, dz$ (جـ) $\int_C \frac{z\, dz}{2z+1}$

(د) $\int_C \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2}\, dz$ ، حيث $(-2 < x_0 < 2)$ (هـ) $\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\, dz$.

الأجوبة : (أ) 2π (ب) $\pi i/4$ (جـ) $-\pi i/2$ (د) $i\pi \sec^2(x_0/2)$ (هـ) صفر

٤ أوجد فى كل من الحالات الآتية تكامل f(z) حول الكفاف المغلق البسيط $|z - i| = 2$ موجها فى الاتجاه الموجب

(أ) $g(z) = \frac{1}{z^2+4}$ (ب) $g(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$

الأجوبة : (أ) $\pi/2$ (ب) $\pi/16$

٥ إذا كانت f دالة تحليلية فى داخلية وعلى كفاف مغلق بسيط C وكانت z_0 ليست على C ، إثبت أن

$$\int_C \frac{f'(z)\, dz}{z - z_0} = \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z-z_0)^2}$$

٦ - لتكن f دالة متصلة على كفاف مغلق بسيط C . استخدم النهج المتبع فى بند ٥٢ لبرهنة أن الدالة

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)\, ds}{s - z}$$

تحليلية عند كل نقطة z فى داخلية C ، ثم إثبت أن الصيغة التكاملية لمشتقة g(z) عند مثل هذه النقطة هى

$$g'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)\, ds}{(s-z)^2}$$

٧ - ليكن C هو دائرة الوحدة $z = \exp(i\theta)$ موجها من $\theta = -\pi$ إلى $\theta = \pi$. لأى عدد حقيقى ثابت a برهن أن

$$\int_C \frac{e^{az}}{z}\, dz = 2\pi i$$ و

ثم عبر عن التكامل ، فى هذه الصيغة ، بدلالة θ لتحصل على الصيغة

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a \sin\theta)\, d\theta = \pi$$

٨ - لتكن f دالة متصلة عند جميع نقط منطقة مغلقة ومحدودة R ، ولتكن f كذلك تحليلية وغير ثابتة فى داخلية R . بفرض أن f(z) لا تساوى الصفر عند أى من نقاط R ، برهن أن $|f(z)|$ لها قيمة صغرى N فى R وبأن $|f(z)| > N$ لكل نقطة فى داخلية R (استخدم الدالة $1/f(z)$ فى برهنة ذلك) .

٩ - اعط مثالاً يبين أن الشرط $f(z) \neq 0$ فى أى مكان من R الوارد فى تمرين (٨) السابق ، هو شرط ضرورى لبرهان نتيجة ذلك التمرين (معنى ذلك أن $|f(z)|$ لا تأخذ قيمتها الصغرى عند نقطة فى داخلية R إلا إذا كانت هذه القيمة هى الصفر) .

١٠ - اعتبر الدالة $f(z) = (z+1)^2$ والمنطقة R المكونة من داخلية وحدود المثلث الذى رؤوسه $z=0$ ، $z=2$ ، $z=i$ ، لتعط توضيحا لكل من قاعدة القيمة العظمى والقاعدة المقابلة لها للقيمة الصغرى المبينة فى تمرين (٨) من هذا البند (أى أوجد نقطاً فى R يكون للدالة $|f(z)|$ عند كل منها قيمة عظمى أو صغرى)

الإجابة : $z=2, z=0$

١١ - لتكن الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ متصلة فى منطقة مغلقة ومحدودة R، ولتكن f فى نفس الوقت تحليلية وليست ثابتة فى داخلية R . برهن أن الدالة $u(x,y)$ تأخذ قيمتها العظمى على حدود R وليس عند أى نقطة داخلية فى R تكون عندها هذه الدالة توافقية .

اقتراح : طبق قاعدة القيمة العظمى على الدالة $\exp[f(z)]$.

١٢ - لتكن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة متصلة فى منطقة مغلقة ومحدودة R، ولتكن f فى نفس الوقت تحليلية وليست ثابتة فى داخلية R . برهن أن الدالة $u(x,y)$ تأخذ قيمتها الصغرى على حدود R وليس عند أى نقطة داخلية فى R . (انظر تمرينى ٨ و ١١) .

١٣ - اعتبر الدالة $f(z) = e^z$ والمنطقة R المكونة من داخلية وحدود المستطيل الذى رؤوسه $z=0$ ، $z=1$ ، $z=1+\pi i$ ، $z=\pi i$ لتوضيح تمرينى ١١و ١٢ . ما نقاط R التى تأخذ عندها الدالة $u(x,y)$ قيمها العظمى والصغرى ؟

الإجابة : $z=1+\pi i$ ، $z=1$.

١٤ - ليكن $u(x,y)$ الجزء الحقيقى من دالة شاملة معطاة $f(z)$. برهن أنه إذا كان للدالة التوافقية $u(x,y)$ حداً أعلى u_0 ، أى أن $u(x,y) < u_0$ لجميع نقاط المستوى xy ، فإن الدالة u(x,y) لابد وأن تكون دالة ثابتة .

١٥ - استكمل خطوات استنباط الصيغة (٣) من بند (٥٢)

١٦ - استخدم مبدأ الاستنتاج الرياضى لبرهان الصيغة (٤) من بند (٥٢)

١٧ - لتكن f دالة شاملة بحيث $|f(z)| \leq A|z|$ لجميع z ، حيث A عدد حقيقى موجب ثابت . برهن أن $f(z) = 0$ لجميع z أو $f(z) = a_1 z$ حيث $a_1 \neq 0$

اقتراح : استخدم متباينة كوشى (المتباينة (٦) من بند ٥٤) لبرهان أن $f''(z) = 0$ لجميع نقاط المستوى المركب .

١٨ - إذا كانت

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0)$$

كثيرة حدود درجتها $n \geqq 1$ ، فبرهن أنه يوجد عدد حقيقي موجب R بحيث

$$|P(z)| > \frac{|a_n||z|^n}{2}$$

لجميع قيم z التي تحقق $|z| > R$

اقتراح : لاحظ أولا أنه يوجد عدد حقيقي موجب R بحيث يكون كل من الأعداد $|a_{n-1}/z|$ ، $|a_{n-2}/z^2|$ ، ... ، $|a_1/z^{n-1}|$ ، $|a_0/z^n|$ أصغر من $|a_n|/(2n)$ لجميع z التي تحقق $|z| \geqq R$ ، وعليه فإن

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right| < \frac{|a_n|}{2}$$

عندما $|z| \geqq R$. هذه النتيجة والمتباينة $|z_1 + z_2| \geqq ||z_1| - |z_2||$ يمكن استخدامهما معاً لبرهان أن

$$\left|a_n + \left(\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right)\right| > \frac{|a_n|}{2}$$

عندما $|z| \geqq R$. النتيجة المطلوب برهنتها يمكن الحصول عليها الآن بضرب كل من طرف هذه المتباينة بالعدد $|z|^n$

١٩ - لتكن P(z) كثيرة حدود درجتها $n \geqq 1$.يقال أن $P(z)$ تقبل القسمة على $z - z_0$ إذا أمكن إيجاد كثيرة حدود $Q(z)$ - يقال لها خارج قسمة quotient كثيرة الحدود $P(z)$ بالنسبة إلى $z - z_0$ - بحيث $P(z) = (z - z_0)Q(z)$.برهن أن :

(أ) كثيرة الحدود $z^n - z_0^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ تقبل القسمة على $z - z_0$ ؛

(ب) كثيرة الحدود $P(z) - P(z_0)$ تقبل القسمة على $z - z_0$ وأن خارج القسمة هو كثيرة حدود درجتها $n - 1$ ؛

(جـ) $P(z)$ تقبل القسمة على $z - z_0$ إذا وفقط إذا كان $P(z_0) = 0$.

الفصل السادس

المتسلسلات Series

نخصص هذا الباب أساساً لدراسة تمثيل الدوال التحليلية على صورة متسلسلات ، وسنبرهن نظريات تبين لنا وجود مثل هذا التمثيل . كما أننا سنعطى طرقا مبسطة لمعالجة المتسلسلات .

٥٦ – تقارب المتتابعات والمتسلسلات Convergence of Sequences and Series

يقال أن **للمتتابعة** اللانهاية

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

من الأعداد المركبة **نهاية** z إذا كان لكل عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد صحيح موجب n_0 بحيث

$$|z_n - z| < \varepsilon \qquad \text{طالما} \qquad n > n_0 \qquad (١)$$

والتفسير الهندسي لهذا المفهوم للنهاية هو أنه يمكننا دائماً اختيار عدد صحيح موجب N ، مهما كان كبيرا ، بحيث تكون جميع النقط z_n ، حيث $n > N$ ، من هذه المتتابعة قريبة قربا كافيا وكيفما نشاء من النقطة z .

سنترك للقارىء برهان أنه إذا كانت لمتتابعة ما نهاية فإن هذه النهاية لابد وأن تكون وحيدة . والمتتابعة التى لها نهاية z يطلق عليها متتابعة **تقاربية** Convergent **(أو إنها تؤول** إلى z) ، ونعبر عن ذلك رمزيا بأن نكتب

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

المتتابعة التى ليس لها نهاية تسمى متتابعة **تباعدية** Divergent

نظرية ١ : إذا كان

$$z_n = x_n + iy_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

و

$$z = x + iy.$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \qquad (٢)$$

إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y. \qquad \text{و} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad (٣)$$

البرهان : لبرهان النظرية نفرض أولا صحة (٢) ثم نبرهن تحقق الشروط (٣) .
وفقاً للشرط (٢) فإنه لكل عدد حقيقى موجب معطى ε يوجد عدد صحيح موجب n_0 بحيث

$$|x_n - x + i(y_n - y)| < \varepsilon \qquad \text{طالما} \qquad n > n_0$$

لكن

$$|x_n - x| \leqq |x_n - x + i(y_n - y)|$$

و

$$|y_n - y| \leqq |x_n - x + i(y_n - y)|.$$

وهذا يستتبع بالضرورة

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \text{و} \qquad |y_n - y| < \varepsilon$$

لجميع $n > n_0$ ، وهذه هى الشروط (٣) المطلوب استيفائها.
لنفرض الآن صحة الشروط (٣) . نعلم أنه لكل عدد حقيقى موجب معطى ε يوجد عددان صحيحان موجبان n_2, n_1 بحيث

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{طالما} \qquad n > n_1$$

و

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{طالما} \qquad n > n_2$$

وعليه فإن

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{و} \qquad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

طالما كان $n > n_0$ ، حيث n_0 أكبر العددين الصحيحين n_2, n_1
لكن

$$|x_n + iy_n - (x + iy)| \leqq |x_n - x| + |y_n - y|,$$

ومن ثم فإن $|z_n - z| < \varepsilon$ طالما $n > n_0$ ، وهو الشرط (٢) المطلوب تحققه .
يقال للمتسلسلة series اللانهائية

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

حيث كل من z_n عدد مركب ، أنها **تؤول** إلى العدد S إذا كانت متتابعة المجاميع **الجزئية Partial sums**

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n \qquad (N = 1, 2, \ldots)$$

تقاربية ونهايتها S . فى هذه الحالة نقول أن S هو **مجموع Sum** المتسلسلة اللانهائية قيد البحث ونعبر عن ذلك بأن نكتب

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

وحيث أن نهاية أى متتابعة تقاربية تكون وحيدة ، فإننا نستنتج أن أى متسلسلة تقاربية لا يمكن أن يكون لها أكثر من مجموع .
يقال لمتسلسلة لا نهائية أنها تباعدية **Divergent** إذا لم تكن تقاربية .

نظرية ٢ : إذا كان

$$z_n = x_n + iy_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

و $S = X + iY.$

فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \tag{٤}$$

إذا وفقط إذا كان

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y \tag{٥}$$

البرهان : ليكن S_N هو مجموع الحدود الأولى التى عددها N من المتسلسلة (٤) . نلاحظ الآن

$$S_N = X_N + iY_N, \tag{٦}$$

حيث

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} x_n \quad \text{و} \quad Y_N = \sum_{n=1}^{N} y_n$$

الآن فالشرط (٤) متحقق إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S$$

وعلى ضوء العلاقة (٦) ، فضلاً عن نظرية (١) ، فإن هذا الشرط يكون متحققا إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{N\to\infty} X_N = X \quad \text{و} \quad \lim_{N\to\infty} Y_N = Y \tag{٧}$$

وهذا يعنى أن الشرطين (٤) و (٧) شرطان متكافئان . وحيث أن X_N، Y_N هما المجاميع الجزئية للمتسلسلتين الواردتين فى (٥) فإننا نكون بذلك قد برهنا النظرية .

لبرهان أن مجموع متسلسلة ما هو العدد S،سنجد أنه من الملائم – فى كثير من الحالات – استخدام ما نطلق عليه **الباق** Remainderبعد حدود عددها N ؛ والباق R_N معرف كالآتى :

$$R_N = S - S_N$$

لاحظ أن $|S_N - S| = |R_N - 0|$ ؛ وعليه فإنه وفقاً للتعريف (١) لنهاية متتابعة ، يكون للنهاية (٧) وجود إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{N\to\infty} R_N = 0 \tag{٨}$$

وعليه فإن **مجموع متسلسلة تقاربية هو العدد S إذا وفقط إذا كانت متتابعة البواق تقاربية ونهايتها الصفر .**

نشير هنا إلى أن **متسلسلات القوى** Power series تلعب دورا هاماً فى نظرية المتغيرات

المركبة . ومتسلسلات القوى هى متسلسلات على الصورة

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \text{أو} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

حيث z_0, a_0 ، a_n أعداد (ثوابت) مركبة وحيث z هو أى عدد مركب داخل منطقة معينة . لمثل هذه المتسلسلات التى تشتمل على متغير z سنرمز لكل من المجموع والمجاميع الجزئية والبواق بالرموز $S(z)$, $S_N(z)$, $R_N(z)$ على التعاقب .

تمـــاريـــن

١ - برهن بطريقتين مختلفتين تقارب المتابعة

$$(n = 1, 2, \ldots) \qquad z_n = -2 + i\frac{(-1)^n}{n^2}$$

٢ - ليكن r_n ، Θ_n هما المقياس والقيمة الأساسية لسعة العدد المركب z_n ، لكل n ، فى تمرين (١) . بين أن المتابعة $r_n \ (n = 1, 2, \ldots)$ متابعة تقاربية وبأن المتابعة $\Theta_n \ (n = 1, 2, \ldots)$ متابعة تباعدية.

٣ - استخدم الباق $R_N(z)$ لبرهان أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$$

حيث z هو أى مركب بحيث $|z| < 1$.

اقتراح : استخدم تمرين (١٤) بند (٦) لبرهان أن

$$|R_N(z)| \leqq |z|^{N+1}/(1 - |z|)$$

٤ - فى الصيغة المعطاة فى تمرين (٣) ضع $z = re^{i\theta}$ ، حيث $0 < r < 1$ ، ومن ثم برهن أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r\cos\theta - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

٥ - برهن أنه إذا وجد لمتابعة ما نهاية ، فإن هذه النهاية تكون وحيدة

٦ - إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ ، فبرهن أن $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n = \bar{S}$.

٧ - إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ ، فبرهن أن $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = cS$ حيث c أى عدد مركب

٨ - برهن أنه إذا كان z هو نهاية المتابعة $z_n \ (n = 1, 2, \ldots)$ ، فإنه يوجد عدد حقيقى موجب M بحيث $|z_n| < M$ لجميع n .

اقتراح : لاحظ أنه يوجد عدد صحيح موجب n_0 بحيث

$$|z_n| \leqq |z| + |z_n - z| < |z| + 1$$

طالما كان $n > n_0$

٩ - برهن أنه إذا كان z هو نهاية المتابعة التقاربية $z_n \ (n = 1, 2, \ldots)$ ، وكان $|z_n| \leqq M$ لجميع n ، فإن $|z| \leqq M$.

اقتراح : لاحظ أن الفرض $|z| > M$ **يستلزم وجود عدد صحيح موجب n_0 بحيث** $|z - z_n| < |z| - M$ **طالما كان** $n > n_0$ **؛ ومن ثم استخدم المتباينة** $|z| - |z_n| \leqq |z - z_n|$ **للحصول على التناقض بأن** $|z_n| > M$ **طالما كان** $n > n_0$ **.**

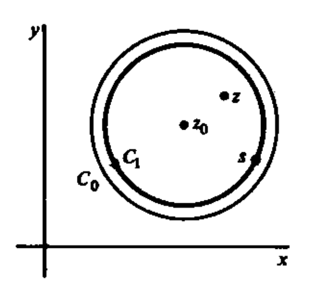
٥٧ – متسلسلة تايلور Taylor Series

نبرهن الآن واحدة من أهم نظريات هذا الباب ، ألا وهى نظرية تايلور

نظرية : لتكن f دالة تحليلية لجميع نقاط داخلية دائرة C_0 مركزها z_0 ونصف قطرها r_0 . عند أى نقطة z فى دخالية C_0 يكون

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots; \quad (١)$$

وهذا يعنى أن متسلسلة القوى أعلاه متسلسلة تقاربية مجموعها f(z) طالما كان $|z - z_0| < r_0$.



شكل (٤٧)

مفكوك f(z) المعطى بالصيغة (١) هو **متسلسلة تايلور** للدالة f(z) حول النقطة z_0 . ونشير إلى أن هذا المفكوك هو متسلسلة تايلور المعروفة فى مبادىء علم التفاضل والتكامل ، وذلك عندما تكون جميع حدود المفكوك اعداداً حقيقية .

لبرهان النظرية نعتبر أى نقطة ثابتة z فى داخلية الدائرة C_0 . إذا كان $|z - z_0| = r$ فإن $r < r_0$. إذا كانت s أى نقطة على دائرة C_1 مركزها z_0 ونصف قطرها r_1 حيث $r < r_1 < r_0$ فإن $|s - z_0| = r_1$ (شكل (٤٧)) . حيث أن z نقطة فى داخلية C_1 وأن f تحليلية لجميع نقاط الدائرة C_1 وداخليتها ، فإنه يمكننا استخدام صيغة تكامل كوشى ، وعليه يكون

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)\,ds}{s - z} \quad (٢)$$

حيث C_1 موجهة فى الاتجاه الموجب.

الآن

$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{(s - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{s - z_0}\,\frac{1}{1 - (z - z_0)/(s - z_0)}.$$

وحيث أنه لأى عدد مركب c لا يساوى ١ ، يكون

$$\frac{1}{1-c} = 1 + c + c^2 + \cdots + c^{N-1} + \frac{c^N}{1-c}.$$

(انظر تمرين (١٤) بند (٦)) ، فإننا نحصل على

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0} \times \left[1 + \frac{z-z_0}{s-z_0} + \cdots + \left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^{N-1} + \frac{1}{1-(z-z_0)/(s-z_0)}\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^N\right]$$

وعليه فإن

$$\frac{f(s)}{s-z} = \frac{f(s)}{s-z_0} + \frac{f(s)}{(s-z_0)^2}(z-z_0) + \cdots + \frac{f(s)}{(s-z_0)^N}(z-z_0)^{N-1} + (z-z_0)^N \frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^N}.$$

نكامل الآن كل حد من هذه الحدود حول C_1 موجها فى الاتجاه المضاد لعقارب الساعة . إذا قسمنا كلا من طرفى المعادلة – بعد إجراء هذه التكاملات – على $2\pi i$ واستخدمنا الصيغة (٢) فضلا عن الصيغ الآتية للتكامل (بند (٥٢))

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

فإننا نحصل على

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \cdots + \frac{f^{(N-1)}(z_0)}{(N-1)!}(z-z_0)^{N-1} + R_N(z) \qquad (٣)$$

حيث

$$R_N(z) = \frac{(z-z_0)^N}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)\,ds}{(s-z)(s-z_0)^N}. \qquad (٤)$$

حيث أن $|z-z_0| = r$ و $|s-z_0| = r_1$ ، يكون

$$|s-z| \geqq |s-z_0| - |z-z_0| = r_1 - r.$$

وعليه فإذا أخذنا M لتكون القيمة العظمى للدالة f(s) على C_1 فإن الصيغة (٤) تعطى

$$|R_N(z)| \leqq \frac{r^N}{2\pi}\frac{M2\pi r_1}{(r_1-r)r_1^N} = \frac{Mr_1}{r_1-r}\left(\frac{r}{r_1}\right)^N.$$

وحيث أن $r/r_1 < 1$ فإن

$$\lim_{N\to\infty} R_N(z) = 0.$$

وعليه فإنه عند أى نقطة z فى داخلية C_0 تكون نهاية مجموع N من حدود الطرف الأيمن للمعادلة (٣) هو f(z) وذلك عندما تؤول N إلى اللانهاية . ومعنى هذا أنه إذا كانت f تحليلية فى داخلية دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها r_0 فإن f(z) يمكن تمثيلها

بمتسلسلة تايلور على الصورة :

(٥) $f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ عندما $|z - z_0| < r_0$

وفى الحالة الخاصة التى تكون فيها $z_0 = 0$ فإننا نحصل على متسلسلة ماكلورين Maclaurin Series :

(٦) $f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ عندما $|z| < r_0$

٥٨ – ملاحظات وأمثلة Observations and Examples

عندما تكون f دالة تحليلية لجميع نقط داخلية دائرة مركزها z_0 ، فإن متسلسلة تايلور حول z_0 والممثلة بالطرف الأيمن من معادلة (١) بند (٥٧) تكون تقاربية بكل تأكيد ومجموعها f(z) لكل نقطة z فى داخلية هذه الدائرة ، وهذايعنى أننا لا نحتاج إجراء اختبار تقارب للمتسلسلة . وفى الواقع فإن نظرية تايلور تبين أن هذه المتسلسلة تقاربية ونهايتها هى f(z) داخل دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها هو المسافة بين z_0 وأقرب نقطة z_1 تكون عندها الدالة f غير تحليلية ، وفى بند (٦٢) سنبين أن هذه الدائرة هى أكبر دائرة مركزها z_0 تكون فى داخليتها هذه المتسلسلة تقاربية وتكون نهايتها f(z) لجميع النقاط z فى داخليتها .

فى المثال الأول سنعطى مفكوك ماكلورين للدالة $f(z) = e^z$. فى هذه الحالة $f^{(n)}(z) = e^z$ وبالتالى $f^{(n)}(0) = 1$. وحيث أن e^z تحليلية عند كل نقطة z فإننا نحصل على

(١) $e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ عندما $|z| < \infty$

لاحظ أنه عندما تكون z حقيقية فإن المفكوك (١) يصبح

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

وهذ المفكوك صحيح لأى عدد حقيقى x .

بنفس الطريقة يمكننا إثبات أن

(٢) $\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ عندما $|z| < \infty$

(٣) $\cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ عندما $|z| < \infty$

(٤) $\sinh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ عندما $|z| < \infty$

(٥) $\cosh z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ عندما $|z| < \infty$

ومثال آخر لمتسلسلة ماكلورين هو المفكوك الآتى الذى يمكن الحصول عليه بسهولة

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \qquad \text{عندما} \quad |z| < 1 \tag{٦}$$

بوضع Z^2 بدلا من z فى هذا المفكوك فإننا نحصل على

$$\frac{1}{1+Z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Z^{2n} \qquad \text{عندما} \quad |Z| < 1$$

وذلك لأن $|Z^2| < 1$ طالما $|Z| < 1$. بوضع $z = -c$ فإن المفكوك (٦) يعطى لنا مجموع المتوالية(المتسلسلة) الهندسية Geometric series اللانهائية حيث c هو أساس هذه المتوالية ، أى أن

$$1 + c + c^2 + \cdots + c^n + \cdots = \frac{1}{1-c} \qquad \text{عندما} \quad |c| < 1 \tag{٧}$$

عندما يكون $z \neq 0$ فإن مشتقات الدالة $f(z) = z^{-1}$ هى

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n n! z^{-n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

وعليه فإن $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$ ؛ ومنه نجد أن متسلسلة تايلور لهذه الدالة حول $z=1$ هى

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n. \tag{٨}$$

وحيث أن الدالة $\frac{1}{z}$ تحليلية عند كل نقطة $z \neq 0$ ، فإن المفكوك المعطى بالمعادلة (٨) يكون صحيحا طالما $|z-1| < 1$.

كمثال آخر سنوجد مفكوك الدالة

$$f(z) = \frac{1+2z}{z^2+z^3} = \frac{1}{z^2}\left(2 - \frac{1}{1+z}\right)$$

فى صورة متسلسلة تحوى قوى z الموجبة والسالبة سواء . لاحظ أنه لا يوجد متسلسلة ماكلورين للدالة f(z) المعطاه أعلاه ، وذلك لأن هذه الدالة ليست تحليلية عند $z = 0$. ومن ناحية أخرى فقد أمكننا إيجاد متسلسلة ماكلورين للدالة $1/(1+z)$ (معادلة (٦)) . وعليه فإنه عندما يكون $0 < |z| < 1$ نجد أن

$$\frac{1+2z}{z^2+z^3} = \frac{1}{z^2}(2 - 1 + z - z^2 + z^3 - \cdots)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - \cdots.$$

تمارين

١ - اثبت أن

$$e^z = e + e\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \qquad \text{عندما} \quad |z| < \infty$$

٢ - اثبت أن

(أ) $$\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z+1)^n \qquad \text{عندما} \quad |z+1| < 1$$

(ب) $$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)\left(\frac{z-2}{2}\right)^n \qquad \text{عندما} \quad |z-2| < 2$$

٣ – اوجد متسلسلة تايلور للدالة cos z حول النقطة $z = \pi/2$

٤ – اوجد متسلسلة تايلور للدالة sinh z حول النقطة $z = \pi i$

٥ – ما هى أكبر دائرة تكون فى داخليتها متسلسلة ماكلورين للدالة tanh z متسلسلة تقاربية وذات نهاية tanh z لجميع النقاط z فى داخلية هذه الدائرة ؟ اكتب الحدين الأوليين غير الصفريين من هذه المتسلسلة .

٦ – إذا كان $0 < |z| < 4$ فبرهن أن

$$\frac{1}{4z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$$

٧ – استخدم التعويض $z = Z - 1$ فى متسلسلة ماكلورين (٦) من بند (٥٨) للحصول على تمثيل للدالة $1/Z$ فى صورة متسلسلة تقاربية فى قوى $Z - 1$ ، وذلك عندما $|Z - 1| < 1$. لاحظ أنه يتعين أن تكون نتيجتك متفقة مع متسلسلة تايلور المذكورة فى المعادلة (٨) من نفس البند .

٨ – استخدم التعويض $z = Z - 1$ فى المفكوك (٦) من بند (٥٨) وكذلك شرط صلاحية هذا المفكوك لتحصل على مفكوك له وجود للدالة $(1 + Z)^{-1}$ ، فى جميع القوى السالبة للعدد المركب Z وذلك لجميع $|Z| > 1$.

الإجابة : $(1 + Z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Z^{-n-1}.$

٩ – إذا كان $z \neq 0$ فبرهن أن

$$\frac{\sin(z^2)}{z^4} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + \cdots$$

١٠ – اوجد تمثيلا للدالة

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$$

على صورة متسلسلة تقاربية نهايتها f(z) تحوى قوى z-1 الموجبة والسالبة وذلك لجميع النقاط z التى تحقق $0 < |z - 1| < 2$

الإجابة : $f(z) = \frac{-1}{2(z-1)} - 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}$

٥٩ – متسلسلة لوران Laurent Series

لتكن C_1, C_2 دائرتين متحدتى المركز . إذا كان المركز المشترك لهاتين الدائرتين هو z_0 وكانت انصاف أقطارهما r_1, r_2 بحيث $r_2 < r_1$ (انظر شكل ٤٨) فإن **نظرية لوران** تنص على

نظرية : إذا كانت f دالة تحليلية على كل من C_1, C_2 وعند كل نقطة من نقاط داخلية المنطقة الحلقية بين هاتين الدائرتين ، فإن الدالة f(z) يكون لها عند كل نقطة z من نقاط هذه المنطقة تمثيل على صورة المفكوك الآتى

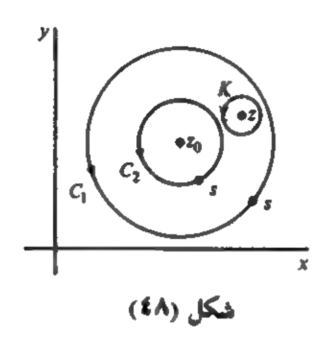
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad (1)$$

حيث

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{٢}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{٣}$$

مع مراعاة أن مسار كل من التكاملين موجها فى اتجاه مضاد لدوران عقرب الساعة.



شكل (٤٨)

المتسلسلة السابقة يطلق عليها **متسلسلة لوران** . إذا كانت f دالة تحليلية على C_1 وعند كل نقطة لا تساوى z_0 من نقاط داخلية C_1 ، فإنه يمكن جعل r_2 صغيرا كيفما نشاء . وفى هذه الحالة يكون المفكوك (١) صحيحا عندما

$$0 < |z - z_0| < r_1.$$

إذا كانت f تحليلية عند جميع نقاط C_1 وداخليتها ، فإن الدالة $f(z)/(z-z_0)^{-n+1}$ تكون تحليلية على الدائرة C_2 وعند جميع نقاط داخليتها وذلك لأن $-n+1 \leqq 0$. وعليه فإن قيمة التكامل المعطى بالصيغة (٣) هى الصفر ، ويؤول بذلك المفكوك (١) إلى متسلسلة تايلور .

وحيث أن الدالتين $f(z)/(z-z_0)^{n+1}$ و $f(z)/(z-z_0)^{-n+1}$ تحليليتان عند جميع نقط المنطقة الحلقية $r_2 \leqq |z-z_0| \leqq r_1$ ، فإنه يمكن استخدام أى كفاف مغلق بسيط C حول هذه الحلقة وموجها فى الاتجاه الموجب ليكون مساراً للتكامل بديلاً للمسارين C_2, C_1 (انظر تمرين(٣)بند (٥٠)) . ووفقاً لذلك فإن متسلسلة لوران يمكن كتابتها على الصورة

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad (r_2 < |z-z_0| < r_1) \tag{٤}$$

حيث

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{٥}$$

وبطبيعة الحال فإن بعض هذه الثوابت ينعدم فى بعض الحالات الخاصة . وعلى سبيل المثال فالدالة

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \qquad (|z-1| > 0),$$

لها مفكوك على الصورة (٤) حيث $z_0 = 1$، وفى هذه الحالة يكون $c_{-2} = 1$،فى حين تنعدم بقية الثوابت الأخرى ، وهذا متفق تماماً مع الصيغة (٥) التى يكون فيها C أى كفاف مغلق بسيط يحوى النقطة $z_0 = 1$ وموجها فى الاتجاه الموجب .

الثوابت التى نجدها فى المفكوك (٤) يمكن الحصول عليها بطرق أخرى لاتستخدم فيها الصيغة (٥) . وعلى سبيل المثال فكل من المفكوكين

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots \qquad (|z| > 0),$$

$$e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,z^n} \qquad (|z| > 0)$$

يمكن الحصول عليه من مفكوك ماكلورين للدالة e^z . وسنرى فى بند (٦٣) تفرد مثل هذين التمثيلين ، وعليه فإن كلا منهما هو متسلسلة لوران عندما $z_0 = 0$.

والآن لبرهان النظرية نلاحظ ابتداء أنه إذا كانت z نقطة فى المنطقة الحلقية فإن

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)\,ds}{s - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(s)\,ds}{s - z}. \qquad (٦)$$

هذه المعادلة صحيحة على ضوء الملاحظات الواردة فى نهاية بند (٥٢) الخاصة بصيغة تكامل كوشى التى يكون فيها مسار التكامل هو الحدود الموجهة لنطاق متعدد الترابط . ولتبيان التفصيلات فى حالتنا الخاصة هذه نعتبر دائرة K ، حول النقطة z موجهة فى الاتجاه الموجب ، وبحيث تكون K واقعة بأكملها داخل النطاق الحلقى (شكل (٤٨)) . إذا استخدمنا الآن نظرية كوشى – جورساه فى صورتها الأعم والتى تشمل الدوال التحليلية فى منطقة مغلقة داخليتها نطاق متعدد الترابط (بند (٤٩)) فإننا نحصل على

$$\int_{C_1} \frac{f(s)\,ds}{s - z} - \int_{C_2} \frac{f(s)\,ds}{s - z} - \int_{K} \frac{f(s)\,ds}{s - z} = 0.$$

ووفقا لصيغة تكامل كوشى ، فإن قيمة التكامل الثالث (الذى مساره K) هى $2\pi i f(z)$، ومنه نجد أن المعادلة (٦) متحققة .

استرشادا ببرهان نظرية تايلور ، فإننا يمكن أن نكتب الدالة المكاملة فى التكامل الأول (حول C_1) من المعادلة (٦) على الصورة

$$\frac{f(s)}{s - z} = \frac{f(s)}{s - z_0} + \frac{f(s)}{(s - z_0)^2}(z - z_0) + \cdots + \frac{f(s)}{(s - z_0)^N}(z - z_0)^{N-1} \qquad (٧)$$

$$+ (z - z_0)^N \frac{f(s)}{(s - z)(s - z_0)^N}.$$

أما بالنسبة للتكامل الآخر من نفس المعادلة (٦)، فإننا نلاحظ أن

$$-\frac{1}{s-z}=\frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)}=\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-(s-z_0)/(z-z_0)}$$

ومنها نحصل على المتساوية

$$-\frac{f(s)}{s-z}=f(s)\frac{1}{z-z_0}+\frac{f(s)}{(s-z_0)^{-1}}\frac{1}{(z-z_0)^2}+\cdots \qquad (٨)$$

$$+\frac{f(s)}{(s-z_0)^{-N+1}}\frac{1}{(z-z_0)^N}+\frac{1}{(z-z_0)^N}\frac{(s-z_0)^N f(s)}{z-s}.$$

وعليه فإن معادلة (٦) تعطى

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_{N-1}(z-z_0)^{N-1}$$

$$+R_N(z)+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{b_N}{(z-z_0)^N}+Q_N(z)$$

حيث a_n , b_n أعداد مركبة تعطيهما الصيغتان (٢) و (٣) وحيث

$$R_N(z)=\frac{(z-z_0)^N}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)\,ds}{(s-z)(s-z_0)^N},$$

$$Q_N(z)=\frac{1}{2\pi i(z-z_0)^N}\int_{C_2}\frac{(s-z_0)^N f(s)}{z-s}\,ds.$$

إذا كان $r=|z-z_0|$ فإن $r_2<r<r_1$. الآن لإثبات أن $R_N(z)$ تؤول إلى الصفر عندما يؤول N إلى اللانهاية اتبع نفس الخطوات المناظرة والتى اتبعت فى استخلاص نظرية تايلور . إذا كانت M هى القيمة العظمى لقيم الدالة $|f(s)|$ على C_2 فإن

$$|Q_N(z)|\le\frac{Mr_2}{r-r_2}\left(\frac{r_2}{r}\right)^N;$$

ومنه نرى أن $Q_N(z)$ تؤول إلى الصفر عندما يؤول N إلى اللانهاية، وبهذا يكتمل برهان نظرية لوران .

٦٠ – خواص أخرى للمتسلسلات Further Properties of Series

إذا كانت المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \qquad (١)$$

من الأعداد المركبة $z_n=x_n+iy_n$ متسلسلة تقاربية ، فإننا نعلم من نظرية (٢) بند (٥٦) أن كلا من المتسلسلتين

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad و \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n \qquad (٢)$$

تكون متسلسلة تقاربية . ولما كنا نعلم أن الشرط اللازم لتقارب متسلسلة لا نهائية

حدودها أعداد حقيقية هو أن يؤول الحد الذى رتبته n إلى الصفر عندما يؤول n إلى اللانهاية ، فإننا نستنتج أن كلا من y_n , x_n من (٢) يؤول إلى الصفر عندما يؤول n إلى اللانهاية ، ومنه تقترب z_0 من الصفر . من هذا نجد أن الشرط

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \qquad (٣)$$

لازم ابتداء لتقارب المتسلسلة (١) . ومن ذلك يتضح أن حدود أى متسلسلة تقاربية من الأعداد المركبة تكون فئة **محدودة Bounded** ؛ بمعنى أنه يوجد عدد حقيقى ثابت M بحيث $|z_n| < M$ لجميع الأعداد الموجبة n .

افرض أن المتسلسلة (١) **مطلقة التقارب Absolutely convergent** بمعنى أن متسلسلة الأعداد الحقيقية

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n{}^2 + y_n{}^2}$$

تكون تقاربية . يتضح لنا الآن من اختبار المقارنة لمتسلسلات الأعداد الحقيقية أن كلا من المتسلسلتين

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \qquad و \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

تكون متسلسلة تقاربية ، وعليه فإن كلا من المتسلسلتين (٢) تكون مطلقة التقارب . ولما كان التقارب المطلق لمتسلسلة أعداد حقيقية يستلزم بالضرورة تقارب المتسلسلة نفسها ، فإننا نستنتج أن كلا من المتسلسلتين (٢) تكون متسلسلة تقاربية . لكننا نعلم أن تقارب المتسلسلتين (٢) يعنى تقارب المتسلسلة (١) . من ذلك يتبين لنا أن **التقارب المطلق لمتسلسلة أعداد مركبة يستلزم بالضرورة تقارب المتسلسلة نفسها** .

سنبرهن الآن نظرية هامة خاصة بتقارب متسلسلات القوى . وهذه النظرية ، تماماً كنتائج أخرى عديدة ستأتى فى السياق ، يمكن تطبيقها على متسلسلة القوى العامة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ولكننا سنكتفى ببرهان النظرية فى الحالة التى تكون فيها $z_0 = 0$. وبرهان الحالة العامة هو فى الأساس نفس البرهان المستخدم هنا ، ذلك أن الكثير من النتائج التى نحصل عليها يمكن تعميمها بمجرد وضع $z\text{-}z_0$ بدلا من z فى بعض الصيغ

نظرية : متسلسلة القوى

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

التقاربية عند $z = z_1 \neq 0$ تكون مطلقة التقارب لكل قيمة للعدد المركب z تحقق $|z| < |z_1|$.

لما كانت المتسلسلة تقاربية فإن فئة الحدود $a_n z_1{}^n$ تكون محدودة وعليه يوجد عدد

حقيقى موجب M بحيث

$$|a_n z_1^n| < M \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

لنكتب

$$\frac{|z|}{|z_1|} = k \qquad \text{حيث} \qquad |z| < |z_1|$$

إذن

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n < Mk^n.$$

الآن فالمتسلسلة التى حدودها هى الأعداد الحقيقية الموجبة Mk^n هى متسلسلة هندسية تقاربية وذلك لأن $k < 1$ وعليه يمكننا استخدام اختبار المقارنة فى نظرية المتسلسلات ذات الحدود الحقيقية لنستنتج أن المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$$

متسلسلة تقاربية ، وبذا نكون قد استكملنا برهان النظرية.

يتضح لنا من النظرية السابقة أنه توجد دائرة مركزها نقطة الأصل بحيث تكون داخليتها منطقة تقارب لمتسلسلة القوى (٤) . وأكبر دائرة مركزها نقطة الأصل بحيث تكون المتسلسلة (٤) تقاربية عند كل نقطة من نقاط داخليتها تسمى دائرةتقارب المتسلسلة Circle of convergence . وبطبيعة الحال فإن **المتسلسلة لا يمكن أن تكون تقاربية عند أى نقطة z_2 خارج هذه الدائرة** ، وذلك وفقاً للنظرية السابقة التى تنص على أنه إذا كانت المتسلسلة تقاربية عند z_2 فإنها تكون تقاربية عند كل نقطة من داخلية دائرة مركزها نقطة الأصل ومارة بالنقطة z_2 ، وهذا يخالف تعريفنا لدائرة التقارب .

إذا استبدلنا z بالنقطة $z\text{-}z_0$ فى (٤) فإننا نحصل على المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n. \qquad (٥)$$

المناقشة السابقة تبين لنا على الفور أنه إذا كانت المتسلسلة (٥) تقاربية عند z_1 ، فإنها لابد وأن تكون مطلقة التقارب عند كل نقطة z فى داخلية الدائرة التى مركزها z_0 والمارة بالنقطة z_1 ؛ وهذا يعنى أنها مطلقة التقارب عندما

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|.$$

وبنفس الطريقة ، إذا كانت المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

تقاربية عند $z = z_1$ ، فإنها تكون بالضرورة مطلقة التقارب عند كل نقطة z فى خارجية الدائرة التى مركزها z_0 والمارة بالنقطة z_1 . وهذا يعنى أن خارجية دائرة ما مركزها z_0 هى منطقة تقارب هذه المتسلسلة

٦١ - التقارب المنتظم Uniform Convergence

لتكن C_1 هى الدائرة $|z|=r_1$ ، ولتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متسلسلة قوى حول $z_0 = 0$ ، تقاربية لجميع نقاط داخلية C_1 . نستخدم هذه المتسلسلة لتعريف الدالة التالية والتى نطاق تعريفها هو $|z| < r_1$:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{١}$$

سنعتبر الآن دالة الباقى التالية والمعرفة على نفس نطاق تعريف $S(z)$:

$$R_N(z) = S(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n. \tag{٢}$$

وحيث أن متسلسلة القوى تقاربية عند أى قيمة ثابتة للعدد المركب z والذى يحقق المتباينة $|z| < r_1$، فإننا نعلم أن الباقى $R_N(z)$ يؤول إلى الصفر ، لمثل هذه القيمة للعدد المركب z ، وذلك عندما يؤول N إلى اللانهاية ؛ وهذا يعنى أنه لأى قيمة معطاة للعدد المركب z بحيث $|z| < r_1$ يوجد عدد صحيح موجب N_ε مناظراً لأى عدد حقيقى موجب ε بحيث

$$|R_N(z)| < \varepsilon \quad \text{طالما} \quad N > N_\varepsilon \tag{٣}$$

وبطبيعة الحال فإن الشرط (٣) يكون متحققا إذا أخذنا z بحيث $|z| \leqq |z_2|$ و $|z_2| < r_1$. ومن ناحية أخرى فإنه يمكننا برهان أن أى عدد حقيقى موجب ε يناظره قيمة مفردة مختارة للعدد N_ε يكون معها الشرط (٣) متحققا بغض النظر عن القيمة المختارة للعدد المركب z فى القرص الدائرى المغلق $|z| \leqq |z_2|$. وفى مثل هذه الحالة التى نحن بصددها والتى يكون فيها اختيارنا للعدد N_ε يعتمد فقط على ε وليس على أى اختيار معين للنقطة z فى المنطقة المعطاه ، يسمى التقارب **تقاربا منتظما Uniform convergence** فى هذه المنطقة .

ولبرهان التقارب المنتظم لمتسلسلة القوى أعلاه فى المنطقة $|z| \leqq |z_2|$، نلاحظ ابتداء أنه لأى عددين موجبين صحيحين N,m بحيث $m > N$ يكون

$$\left|\sum_{n=N}^{m} a_n z^n\right| \leqq \sum_{n=N}^{m} |a_n|\,|z|^n \leqq \sum_{n=N}^{m} |a_n|\,|z_2|^n = \sum_{n=N}^{m} |a_n z_2^n|. \tag{٤}$$

ونهاية المجموع الأخير عندما يؤول m إلى اللانهاية هى الباقى

$$Q_N = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=N}^{m} |a_n z_2|^n \tag{٥}$$

بعد N حدا من متسلسلة القيم المطلقة لحدود المتسلسلة (١) عندما $z = z_2$. ونعلم من نظرية البند السابق أن المتسلسلة (١) تكون مطلقة التقارب عندما $z = z_2$. نلاحظ الآن

أن Q_N هو باق لمتسلسلة تقاربية ، وعليه فإن Q_N يؤول إلى الصفر عندما يقترب N من اللانهاية . ومعنى هذا أنه لأى عدد حقيقى موجب ε ، يوجد عدد صحيح N_ε بحيث $Q_N < \varepsilon$ طالما $N > N_\varepsilon$. وكذلك فإن حدود المتسلسلة التى يكون Q_N باق لها هى حدود غير سالبة ، وبالتالى فإن

$$\sum_{n=N}^{m} |a_n z_2|^n \leqq Q_N.$$

إذن ، فوفقا للعلاقة (٤) يكون

$$\left|\sum_{n=N}^{m} a_n z^n\right| \leqq Q_N \tag{٦}$$

لكل عدد صحيح m أكبر من N . ولكننا – وفقا للمعادلة (٢) – نعلم أن

$$R_N(z) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=N}^{m} a_n z^n$$

وعليه يكون

$$|R_N(z)| \leqq Q_N < \varepsilon \quad \text{طالما} \quad N > N_\varepsilon \tag{٧}$$

(انظر تمرين (٩) بند(٥٦)).الآن N_ε لا تعتمد على z فى النطاق $|z| \leqq |z_2|$ ؛ ولذلك فإن التقارب يكون تقاربا منتظما .

نذكر الآن نص النتيجة التى توصلنا إليها عاليه على الوجه التالى

نظرية : متسلسلة القوى (١) منتظمة التقارب لجميع النقاط z على وفى داخلية أى دائرة تقع فى داخلية دائرة تقارب المتسلسلة.

المجموع الجزئى

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n$$

للمتسلسلة (١) هو كثيرة حدود فى z ، وبالتالى فهو يمثل دالة متصلة عند أى نقطة z_2 نختارها فى داخلية الدائرة C_1 . نبرهن الآن أن المجموع S(z) يمثل أيضاً دالة متصلة عند z_2 ؛ وهذا يعنى أنه لكل عدد حقيقى موجب ε ، يوجد عدد حقيقى موجب δ بحيث

$$|S(z) - S(z_2)| < \varepsilon \quad \text{طالما} \quad |z - z_2| < \delta \tag{٨}$$

لإثبات ذلك نلاحظ أولا أن المعادلة

$$S(z) = S_N(z) + R_N(z)$$

تستلزم أن

$$|S(z) - S(z_2)| = |S_N(z) - S_N(z_2) + R_N(z) - R_N(z_2)|,$$

أى أن

$$|S(z) - S(z_2)| \leqq |S_N(z) - S_N(z_2)| + |R_N(z)| + |R_N(z_2)| \tag{٩}$$

إلا أن التقارب المنتظم الذى تبيناه آنفا يقتضى وجود عدد صحيح M_ε بحيث

$$N > M_\varepsilon \quad \text{طالما} \quad |R_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{١٠}$$

حيث z أى نقطة تنتمى إلى قرص مغلق مركزه نقطة الأصل ونصف قطره أكبر من $|z_2|$ وأصغر من نصف القطر r_1 للدائرة C_1 . وعلى وجه التخصيص فإن المتباينة $|R_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ تكون متحققة لجميع النقاط المنتمية إلى جوار $|z - z_2| < \delta$ للنقطة z_2 والذى يمكن اختياره صغيرا صغرا كافيا بحيث يقع داخل القرص المغلق المعنى.

ومن ناحية أخرى فإن كثيرة الحدود $S_N(z)$ تكون متصلة عند z_2 لأى قيمة للعدد N . وإذا أخذنا $N = M_\varepsilon + 1$ على وجه التخصيص ، فإنه يمكننا اختيار قيمة صغيرة صغرا كافيا للعدد الحقيقى δ بحيث

$$|z - z_2| < \delta \quad \text{طالما} \quad |S_N(z) - S_N(z_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ومن ذلك يتضح أن الشرط (٨) يكون متحققا ، إذا أخذنا $N = M_\varepsilon + 1$ فى المتباينة (٩) .

وبهذا الشكل نكون قد برهنا أن **متسلسلة القوى تمثل دالة متصلة فى المتغير المركب z عند كل نقطة من نقاط داخلية دائرة تقارب هذه المتسلسلة .**

والآن إذا وضعنا العدد $z - z_0$ أو معكوسه $1/(z - z_0)$ بدلا من z ، فإنه يمكننا مباشرة تعميم النتائج السابقة ، وذلك بعد إجراء التعديلات الواضحة ، لتشمل المتسلسلات

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} .$$

وعلى سبيل المثال ، إذا كانت المتسلسلة الثانية تقاربية فى الحلقة $r_1 \leqq |z - z_0| \leqq r_2$ فإنها تكون منتظمة التقارب عند جميع نقاط هذه الحلقة وأن مجموعها يكون دالة متصلة فى المتغير المركب z عند جميع نقاط هذه المنطقة .

٦٢ – تكامل وتفاضل متسلسلات القوى

Integration and Differentiation of Power Series

لقد بينا فى البند السابق أن أى متسلسلة قوى تمثل دالة متصلة S عند جميع نقاط داخلية دائرة تقارب هذه المتسلسلة . وسنبين فى البند الحالى أن S هى فى الواقع دالة تحليلية على داخلية دائرة التقارب.

نظرية ١ : ليكن C كفافاً فى داخلية دائرة تقارب متسلسلة القوى

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{١}$$

ولتكن g أى دالة متصلة عند جميع نقاط C . المتسلسلة التى نحصل عليها بضرب كل حد من حدود متسلسلة القوى فى g(z) تكون قابلة للتكامل حداً حداً على امتداد C ، أى أن

$$\int_C g(z)S(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z)z^n\,dz. \qquad (٢)$$

حيث أن المجموع S(z) لمتسلسلة القوى يمثل دالة متصلة ، فإن تكامل حاصل الضرب

$$g(z)S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n g(z)z^n + g(z)R_N(z),$$

، حيث $R_N(z)$ هو باقى المتسلسلة بعد N حداً ، له وجود . ولما كان كل حد من حدود هذا المجموع المحدود هو دالة متصلة فوق الكفاف C ، فإنه يكون بطبيعة الحال قابلاً للتكامل على امتداد C . وبالتالى فإن تكامل $g(z)R_N(z)$ له وجود ويكون

$$\int_C g(z)S(z)\,dz = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)z^n\,dz + \int_C g(z)R_N(z)\,dz. \qquad (٣)$$

لتكن M القيمة العظمى للدالة $|g(z)|$ فوق C ، وليكن L هو طول C . وحيث أن متسلسلة القوى المعطاه منتظمة التقارب (بند (٦١)) ، فإنه يمكننا إيجاد عدد حقيقى N_ε مناظراً لكل عدد حقيقى موجب معطى ε بحيث

$$|R_N(z)| < \varepsilon \qquad \text{طالما} \qquad N > N_\varepsilon$$

وذلك لجميع نقاط الكفاف C .

وحيث أن كلا من ε و N_ε لا يعتمد على z ، فإننا نجد أن

$$\left| \int_C g(z)R_N(z)\,dz \right| < M\varepsilon L \qquad \text{طالما} \qquad N > N_\varepsilon$$

إذن فمن معادلة (٣) يكون

$$\int_C g(z)S(z)\,dz = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)z^n\,dz.$$

وهى تماماً المعادلة (٢) المطلوب برهانها .

إذا كانت $g(z) = 1$ لكل نقطة z من نقاط أى كفاف مغلق بسيط C فى داخلية دائرة تقارب المتسلسلة المعطاة ، فإن

$$\int_C g(z)z^n\,dz = \int_C z^n\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

وبالتالى فإننا نحصل من معادلة (٢) على

$$\int_C S(z)\,dz = 0$$

لأى كفاف مغلق بسيط فى داخلية دائرة التقارب ؛ ووفقاً لنظرية موريرا (بند (٥٣)) فإن الدالة S تكون تحليلية على داخلية دائرة التقارب . وهذه النتيجة التى توصلنا إليها هى منطوق النظرية التالية

نظرية ٢ : أى متسلسلة قوى تمثل دالة تحليلية لجميع نقاط داخلية دائرة تقارب هذه المتسلسلة.

كثيراً ما تستخدم نظرية (٢) لبرهان تحليلية الدوال أو لحساب النهايات . ولتوضيح ذلك سنبرهن أن الدالة

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z} & (z\neq 0)\\ 1 & (z=0)\end{cases}$$

دالة شاملة . حيث أن متسلسلة ماكلورين لدالة الجيب تؤول إلى $\sin z$ لجميع z ، فإن المتسلسلة

$$1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}, \qquad (٤)$$

التى نحصل عليها بضرب كل حد من حدود مفكوك ماكلورين للدالة $\sin z$ فى $1/z$ هى متسلسلة تقاربية مجموعها $f(z)$ حيث $z\neq 0$. لكن المتسلسلة (٤) تؤول إلى $f(0)$ عندما يؤول العدد المركب z إلى الصفر.وبالتالى فإن الدالة $f(z)$ تمثلها متسلسلة القوى التقاربية (٤) لجميع z وهذا يعنى أن الدالة $f(z)$ دالة شاملة . وحيث أن f متصلة عند $z=0$ و $(\sin z)/z=f(z)$ عندما $z\neq 0$ يكون

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=\lim_{z\to 0}f(z)=f(0)=1. \qquad (٥)$$

وهى نتيجة نعرفها سلفا ، ذلك أن النهاية فى (٥) هى تعريف مشتقة الدالة $\sin z$ عند $z=0$.

لاحظنا فى بند (٥٨) أن متسلسلة تايلور لدالة f حول نقطة z_0 هى متسلسلة تقاربية نهايتها $f(z)$ عند كل نقطة z فى داخلية دائرة مركزها z_0 ومارة بأقرب نقطة z_1 لا تكون عندها f تحليلية . ووفقاً لنظرية (٢) ، نعلم أنه لا توجد دائرة مركزها z_0 وأكبر من هذه الدائرة بحيث تكون متسلسلة تايلور للدالة f تقاربية وتؤول إلى $f(z)$ عند كل نقطة z من نقاط داخلية هذه الدالة الأكبر ؛ وسبب هذا هو أن وجود مثل هذه الدائرة يستلزم بالضرورة أن تكون f تحليلية عند z_1 مما يخالف الفرض .

وعلى أية حال فإنه يجب مراعاة أنه حتى بفرض عدم وجود دائرة أكبر مركزها z_0 بحيث تؤول متسلسلة تايلور للدالة f إلى $f(z)$ عند كل نقطة من نقاط داخلية هذه الدائرة ، فإنه من المحتمل أن تكون متسلسلة تايلور نفسها متسلسلة تقاربية عند كل نقطة من نقاط داخلية هذه الدائرة . فعلى سبيل المثال ، الدائرة $|z|=1$ هى أكبر دائرة مركزها نقطة الأصل تكون فى داخليتها متسلسلة ماكلورين للدالة $f(z)=e^z(z-1)/(z-1)$

تقاربية ونهايتها f(z) لجميع z حيث $|z| < 1$، ومع ذلك فإن هذه المتسلسلة تكون تقاربية لجميع نقاط المستوى المركب

النظرية التالية هى ، بشكل ما ، قرين نظرية (١)

نظرية ٣ : متسلسلة القوى (١) يمكن اشتقاقها حدا حدا بمعنى أنه لكل نقطة z من نقاط داخلية دائرة تقارب المتسلسلة يكون

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}. \tag{٦}$$

لبرهان النظرية نأخذ أى نقطة z فى داخلية دائرة تقارب المتسلسلة ، ونعتبر كفافا مغلقاً بسيطاً C داخل هذه الدائرة ومطوقا للنقطة z . اعتبر الدالة

$$g(s) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(s-z)^2} \tag{٧}$$

المعرفة عند كل نقطة s من نقاط C . حيث أن الدالة

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

تحليلية عند كل نقطة من نقاط C وداخليته ، يكون

$$\int_C g(s)S(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{S(s)}{(s-z)^2}\, ds = S'(z)$$

وذلك باستخدام التمثيل التكاملى للمشتقة (معادلة (٢) بند (٥٢)) وفضلاً عن ذلك ، فإن

$$\int_C g(s)s^n\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{s^n}{(s-z)^2}\, ds = \frac{d}{dz} z^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

وعليه فوفقا لمعادلة (٢) يكون

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dz} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}.$$

وذلك مع مراعاة أن s تلعب هنا دور z فى المعادلة (٢) وبأن الدالة g (s) هى المعطاة بالمعادلة (٧) . وبهذا نكون قد استكملنا برهان النظرية .

نتائج هذا البند يمكن تعميمها بسهولة لتشمل المتسلسلات التى تحتوى قوى $z - z_0$ الموجبة أو السالبة .

تمارين

١ - بإيجاد مشتقات متسلسلة ماكلورين للدالة $1/(1-z)$ ، بين أن

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}, \qquad \frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} \qquad (|z| < 1).$$

٢ - أوجد مفكوكا بدلالة قوى $z-1$ للدالة $1/z$ بإيجاد مشتقات هذا المفكوك أوجد مفكوكا بدلالة قوى $z-1$ للدالة $1/z^2$.
أوجد دائراة تقارب كل من التمثيلين.

٣ - اجر تكامل متسلسلة ماكلورين للدالة $1/(1+s)$ حول كفاف فى داخلية دائرة تقارب هذه الدالة من $s=0$ إلى $s=z$ للحصول على التمثيل الآتى :

$$\text{Log}\,(z+1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} \qquad (|z|<1).$$

٤ - برهن أن الدالة f دالة شاملة إذا كان $f(z)=(e^{cz}-1)/z$ عندما $z\neq 0$ و $f(0)=c$.

٥ - أوجد مفكوك sinh z بدلالة قوى $z-\pi i$ ، ومن ثم اثبت أن

$$\lim_{z\to\pi i}\frac{\sinh z}{z-\pi i}=-1.$$

٦ - إذا كان $f(z)=z^{-1}\,\text{Log}\,(z+1)$ حيث $z\neq 0$ ، $f(0)=1$ ، برهن أن f تحليلية لجميع نقاط النطاق $|z|<1$.

٧ - إذا كان $f(z)=(z^2-\pi^2/4)^{-1}\cos z$ حيث $z^2\neq\pi^2/4$ و $f(\pm\pi/2)=-1/\pi$ ، فبرهن أن f دالة شاملة .

٨ لتكن f دالة تحليلية عند z_0 و $f(z_0)=0$. استخدم المتسلسلات لبرهان النهاية

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{z-z_0}=f'(z_0).$$

لاحظ فى نفس الوقت أن هذه النهاية يمكن الحصول عليها مباشرة من تعريف $f'(z_0)$.

٩ لتكن f, g دالتان تحليليتان عند z_0 و $f(z_0)=g(z_0)=0$ بينما $g'(z_0)\neq 0$ ، برهن أن

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

١٠ إذا كانت f تحليلية عند z_0 وكان $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m)}(z_0)=0$ ، برهن أن الدالة

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} & (z\neq z_0)\\[2ex] \dfrac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} & (z=z_0)\end{cases}$$

تكون تحليلية عند z_0 .

٦٣ - تفرد التمثيل Uniqueness of Representation

المتسلسلة الواردة فى معادلة (٦) من البند السابق هى متسلسلة قوى تقاربية مجموعها $S'(z)$ لجميع نقاط داخلية دائرة التقارب C_0 للمتسلسلة

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n. \qquad (١)$$

وعليه فإن تلك المتسلسلة الممثلة للدالة $S'(z)$ يمكن اشتقاقها حدا حداً ؛ بمعنى أن

$$S''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n z^{n-2}$$

لجميع z فى داخلية C_0 . وبالتأكيد فإن مشتقة الدالة $S(z)$ لأى رتبة يمكن الحصول عليها إذا أخذنا بشكل تتابعى مشتقة المتسلسلة الممثلة لها حداً حداً . وبالإضافة إلى ذلك فإن

$$S(0) = a_0, \qquad S'(0) = a_1, \qquad S''(0) = 2!\,a_2, \ldots,$$

والمعاملات a_n هى معاملات مفكوك ماكلورين للدالة $S(z)$ ، أى أن

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

وتعميم ما سبق بالنسبة للمتسلسلات التى تحتوى قوى موجبة للمقدار $z-z_0$ يمكن الحصول عليه مباشرة . وبهذا نكون قد حصلنا على النظرية التالية والخاصة بتفرد تمثيل الدوال على صورة متسلسلات قوى

نظرية ١ : إذا كانت المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{٢}$$

تقاربية ومجموعها $f(z)$ عند جميع نقاط داخلية دائرة ما $|z-z_0| = r_0$ ، فإن هذه المتسلسلة هى بالضرورة متسلسلة تايلور للدالة $f(z)$ بدلالة قوى $(z-z_0)$.

ولتوضيح ذلك نقول أنه إذا استبدلنا z فى مفكوك ماكلورين للدالة $\sin(z)$ بالمتغير z^2 فإننا نحصل على

$$\sin(z^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{4n-2}}{(2n-1)!} \qquad (|z| < \infty). \tag{٣}$$

هذه المتسلسلة لابد وأن تكون متطابقة مع تلك التى نحصل عليها مباشرة بإيجاد مفكوك ماكلورين للدالة $\sin(z^2)$.

وكنتيجة لنظرية (١) نجد أنه إذا كان مجموع المتسلسلة (٢) هو الصفر عند كل نقطة من نقاط جوار ما للنقطة z_0 ، فإن كلا من المعاملات a_n لابد وأن يكون مساويا للصفر .

نظرية ٢ : إذا كانت المتسلسلة

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \tag{٤}$$

تقاربية ومجموعها $f(z)$ لجميع نقاط نطاق حلقى حول النقطة z_0 ، فإن هذه المتسلسلة هى بالضرورة متسلسلة لوران للدالة $f(z)$ بدلالة قوى $(z-z_0)$ فى هذا النطاق .

نبرهن هذه النظرية باستخدام نظرية (١) من البند السابق وذلك فى حالتها الأكثر عمومية والتى تشمل قوى موجبة وسالبة للمقدار $z-z_0$. ليكن

$$\int_C g(z)f(z)\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_C g(z)(z-z_0)^n\,dz \tag{٥}$$

حيث

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i(z - z_0)^{m+1}} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

و C دائرة حول النطاق الحلقى المعطى مركزها z_0 وموجهة فى الاتجاه الموجب . حيث أن

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z - z_0)^{m-n+1}} = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases}$$

(انظر تمرين (١٦) بند (٤٥)) ، فإننا نلاحظ أن معادلة (٥) تؤول إلى

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{m+1}} = c_m$$

وهذا يعطى صيغة لمعاملات مفكوك لوران للدالة f(z) فى النطاق الحلقى المعطى .

٦٤ – الضرب والقسمة Multiplication and Division

لنفرض أن كلا من متسلسلتى القوى

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \qquad \text{و} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (١)$$

تكون تقاربية فى داخلية دائرة ما $|z| = r_0$. من ذلك نجد أن كلا من النهايتين g(z), f(z) لهاتين المتسلسلتين على التعاقب تكون دالة تحليلية لجميع نقاط القرص $|z| < r_0$، كما أن حاصل ضرب هاتين الدالتين يمكن تمثيله عند أى نقطة من نقاط هذا القرص ، على صورة متسلسلة ماكلورين الآتية

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (|z| < r_0). \qquad (٢)$$

والصيغ التالية تعطى لنا قيم المعاملات c_n

$$\begin{aligned} c_0 &= f(0)g(0) = a_0 b_0, \\ c_1 &= f(0)g'(0) + f'(0)g(0) = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ c_2 &= \frac{1}{2!}[f(0)g''(0) + 2f'(0)g'(0) + f''(0)g(0)] \\ &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \end{aligned}$$

وهكذا . وقد استخدمنا هنا حقيقة أن المتسلسلتين (١) هما متسلسلتا ماكلورين للدالتين g(z), f(z) على التعاقب . وباستخدام صيغة المشتقة النونية لحاصل ضرب دالتين ، فإننا نجد أن

$$\begin{aligned} f(z)g(z) = a_0 b_0 &+ (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 + \cdots \\ &+ \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n + \cdots \qquad (|z| < r_0). \end{aligned} \qquad (٣)$$

المتسلسلة (٣) هى نفس المتسلسلة التى نحصل عليها من ضرب المتسلسلتين (١) معاً حداً حداً ووضع الناتج على صورة متسلسلة فى قوى z ؛ وتسمى المتسلسلة (٣) **بحاصل**

ضرب كوشى Cauchy product للمتسلسلتين المعطاتين . والآن يمكننا صياغة النظرية التالية:

نظرية : حاصل ضرب كوشى لمتسلسلتى القوى (١) هو متسلسلة تقاربية لجميع نقاط داخلية صغرى دائرتى تقارب هاتين المتسلسلتين ؛ ومجموع هذه المتسلسلة التقاربية هو حاصل ضرب مجموع المتسلسلتين الأصليتين .

سنفرض أيضاً فيما يلى أن $f(z)$ و $g(z)$ هما مجموعا المتسلسلتين (١) وأن $g(z) \neq 0$ فى جوار ما لنقطة الأصل . خارج القسمة $h(z) = f(z)/g(z)$ دالة تحليلية فى هذا الجوار ، وعليه فإن h(z) يكون لها مفكوك ماكلورين الآتى

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \tag{٤}$$

حيث $d_0 = h(0)$, $d_1 = h'(0)$, $d_2 = h''(0)/2!$ وهكذا . المعاملات الأولى لهذه المتسلسلة يمكن الحصول عليها بدلالة المعاملات a_n و b_n للمتسلسلتين (١) وذلك بأخذ مشتقات خارج القسمة $f(z)/g(z)$ بشكل تتابعى . والنتائج التى نحصل عليها هى نفسها التى نحصل عليها عند قسمة أولى المتسلسلتين فى (١) على الأخرى . وبهذه الطريقة فإن الحدود ، القليلة ، الأولى من خارج القسمة – وذلك بعد إعادة ترتيبه ووضعه على صورة متسلسلة قوى فى z – هى نفسها الحدود الأولى لمفكوك ماكلورين للدالة $f(z)/g(z)$. وعلى أية حال فإن هذه النتيجة صحيحة لجميع الحدود ، بمعنى أنه يمكننا برهان أن المتسلسلة التى نحصل عليها بإحدى الطريقتين تكون متطابقة مع المتسلسلة التى نحصل عليها بالطريقة الأخرى .

وجمع متسلسلتى قوى حداً حداً صحيح دائماً لجميع النقاط المشتركة لمنطقتى تقارب هاتين المتسلسلتين ، وهذه النتيجة تتضح لنا مباشرة من تعريف مجموع متسلسلتى القوى . ولما كان ضرب متسلسلة قوى فى عدد ثابت حالة خاصة من النظرية السابقة الخاصة بضرب متسلسلتى قوى ، فإن أى متسلسلتين للقوى يمكن طرحهما حداً حداً .

٦٥ – أمثلة Examples

نعتبر أولا الدالة

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} \tag{١}$$

هذه الدالة تحليلية لجميع نقاط المستوى المركب فيما عدا عند $z = 1$ و $z = 2$.

مثال ١ : أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة f(z) داخل القرص المفتوح $|z| < 1$.

لاحظ أن $|z/2| < 1$ عند كل نقطة من نقاط هذا القرص . وبالتالى فإن معرفتنا لمجموع المتسلسلة الهندسية (بند (٥٨)) يعطى

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} - \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^n - z^n\right] \qquad (|z| < 1).$$

هذه المتسلسلة فى قوى z تقاربية ومجموعها f(z) عندما $|z| < 1$. ومن تفرد التمثيل (بند (٦٣)) يتضح لنا أن هذه المتسلسلة هى متسلسلة ماكلورين للدالة f(z) . وهذا يعنى أن معامل z^n فى المفكوك

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n-1} - 1)z^n \qquad (|z| < 1) \qquad (٢)$$

لابد وأن يكون $f^{(n)}(0)/n!$ ؛ ومن ثم فإن $f^{(n)}(0) = n!(2^{-n-1} - 1)$.

مثال ٢ : أوجد متسلسلة لوران للدالة f(z) لجميع نقاط النطاق الحلقى $1 < |z| < 2$.

فى هذا النطاق الحلقى $|1/z| < 1$ و $|z/2| < 1$. وبالتالى فإن

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1 - 1/z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 - z/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \qquad (1 < |z| < 2). \qquad (٣)$$

وحيث أنه لا يوجد إلا تمثيل واحد للدالة f(z) فى هذه الحلقة ، فإن المفكوك (٣) هو مفكوك لوران للدالة f(z) فى هذا النطاق الحلقى . وحيث أن معامل z^{-1} هو $c_{-1} = 1$ ، فإن صيغة (٥) بند (٥٩) للمعاملات c_n تبين إنه إذا كان C أى كفاف مغلق بسيط حول النطاق الحلقى وموجها فى الاتجاه الموجب ، فإن

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i.$$

مثال ٣ : أوجد متسلسلة لوران للدالة f(z) لجميع نقاط النطاق $|z| > 2$.

فى هذا النطاق $|1/z| < 1$ و $|2/z| < 1$.وعليه يكون

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1 - 1/z} - \frac{1}{1 - 2/z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1 - 2^n}{z^{n+1}} \qquad (|z| > 2). \qquad (٤)$$

وهذه هى متسلسلة لوران المطلوبة . وفى هذه الحالة يكون معامل z^{-1} هو الصفر ؛ وبالتالى فإن تكامل f(z) حول أى كفاف مغلق بسيط حول نقطة الأصل ومرسوم خارج الدائرة $|z| = 2$ يساوى الصفر .

مثال ٤ : أوجد الحدود الأولى من متسلسلة لوران للدالة

$$h(z) = \frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^3}\frac{1}{1 + z^2/3! + z^4/5! + \cdots}$$

وذلك لجميع نقاط النطاق $0 < |z| < \pi$.

لاحظ أن مقام الكسر الأخير هنا هو متسلسلة قوى تقاربية مجموعها $z^{-1}\sinh z$ عندما $z \neq 0$ والوحدة عندما $z = 0$. ومن ثم فإن مجموع هذه المتسلسلة لا يساوى صفرا عند أى نقطة من نقاط النطاق $|z| < \pi$ ،وتكون متسلسلة القوى الممثلة لهذا الكسر والتى يمكن الحصول عليها بالقسمة على الصورة

$$\frac{1}{1 + z^2/3! + z^4/5! + \cdots} = 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right]z^4 + \cdots \qquad (|z| < \pi).$$

وبالتالى فإن الحدود الأولى من متسلسلة لوران للدالة $h(z)$ فى النطاق المعطى يمكن

الحصول عليها مباشرة ويكون

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6}\frac{1}{z} + \frac{7}{360} z + \cdots \qquad (0 < |z| < \pi). \qquad (٥)$$

٦٦ – أصفار الدوال التحليلية Zeros of Analytic Functions

نعلم أن أى دالة f تحليلية عند النقطة z_0 يمكن تمثيلها بمتسلسلة تايلور على داخلية دائرة ما مركزها z_0 ، أى أن

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (|z - z_0| < r_0), \qquad (١)$$

حيث $a_0 = f(z_0)$ و $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.وإذا كانت z_0 أحد أصفار f فإن $a_0 = 0$.وإذا فرضنا بالإضافة إلى ذلك أن

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \qquad (٢)$$

بينما $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ فإننا نسمى z_0 صفرا من درجة m . وفى هذه الحالة يكون

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - z_0)^n \qquad (a_m \neq 0, |z - z_0| < r_0). \qquad (٣)$$

إذا كانت g(z) هى مجموع المتسلسلة الواردة فى (٣) فإن

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - z_0)^n \qquad (|z - z_0| < r_0). \qquad (٤)$$

لاحظ أن $g(z_0) = a_m \neq 0$. وحيث أن المتسلسلة (٤) تقاربية ، فإن الدالة g تكون متصلة عند z_0 . وبالتالى فإنه لكل عدد حقيقى موجب ε يوجد عدد حقيقى موجب δ بحيث

$$|g(z) - a_m| < \varepsilon \qquad \text{طالما} \qquad |z - z_0| < \delta$$

إذا كانت $\varepsilon = |a_m|/2$ وكانت δ_0 هى قيمة δ المناظرة فى هذه الحالة ، فإن

$$|g(z) - a_m| < \frac{|a_m|}{2} \qquad \text{طالما} \qquad |z - z_0| < \delta \qquad (٥)$$

ومن هذا نتبين أن $g(z) \neq 0$ عند أى نقطة من نقاط الجوار $|z - z_0| < \delta_0$ ولتبيان ذلك نشير إلى أنه إذا كانت $g(z) = 0$ عند أى نقطة فى هذا الجوار فإن المتباينة الأولى من (٥) تصبح $|a_m| < |a_m|/2$

وبذلك نكون قد برهنا النظرية التالية

نظرية : لتكن f دالة تحليلية عند النقطة z_0 . إذا كانت z_0 أحد أصفار f فإنه يوجد جوار للنقطة z_0 لا يحتوى أصفاراً أخرى للدالة f ، اللهم إلا إذا كانت f هى الدالة الصفرية . وهذا يعنى أن أصفار الدالة التحليلية تكون معزولة .

تمـــاريـــن

١ – لتكن $g(z) = \sin(z^2)$ استخدم متسلسلة ماكلورين (٣) بند (٦٣) بالنسبة للدالة g لتثبت

أن $g^{(2n-1)}(0)=0$ و $g^{(4n)}(0)=0$ وذلك لجميع $(n=1, 2, \ldots)$

٢ – استخدم المفكوك (٥) بند (٦٥) لتبين أنه إذا كانت C هو الدائرة $|z|=1$ موجهة فى الاتجاه الموجب ، فإن

$$\int_C \frac{dz}{z^2 \sinh z} = -\frac{\pi i}{3}$$

٣ – اثبت أن متسلسلة ماكلورين للدالة $z\cosh(z^2)$ حيث $|z|<\infty$ هى

$$z+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{4n+1}$$

٤ – اعط تمثيلاً للدالة $(z+1)/(z-1)$ ، على صورة :

(أ) متسلسلة ماكلورين وأوجد منطقة صلاحية هذا التمثيل للدالة ،

(ب) متسلسلة لوران بالنسبة للنطاق $|z|>1$.

الأجوبة : (أ) $-1-2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \ (|z|<1)$ (ب) $1+2\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \ (|z|>1)$.

٥ – أوجد مفكوكا للدالة $(z-1)/z^2$ على صورة

(أ) متسلسلة تايلور بدلالة قوى $z-1$ ثم بين منطقة صلاحية هذا المفكوك

(ب) متسلسلة لوران بالنسبة للنطاق $|z-1|>1$

الأجوبة : (أ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^n \ (|z-1|<1)$ (ب) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{-n}$.

٦ اثبت أن متسلسلة لوران للدالة $\frac{\sinh z}{z^2}$ هى $(|z|>0)$ $\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n-1}$

٧ أوجد مفكوكين ، كل منهم على صورة متسلسلة لوران، بدلالة قوى z ، للدالة

$$f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}$$

ثم أوجد منطقة صلاحية كل من المفكوكين .

الأجوبة : $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2} \quad (0<|z|<1); -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-3} \quad (|z|>1)$

٨ – أوجد متسلسلتى لوران، بدلالة قوى z، للدالة $z^{-1}(1+z^2)^{-1}$ ثم اوجد نطاق صلاحية كل من المتسلسلتين

٩ – أوجد الأربعة حدود الأولى غير الصفرية لمتسلسلة لوران الآتية

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}+1-\frac{1}{2}z-\frac{5}{6}z^2+\cdots \qquad (0<|z|>1).$$

١٠ - أوجد الحدود الأولى غير الصفرية لمتسلسلة لوران لكل من الحالتين الآتيتين

(أ) $(0<|z|<\pi)$ $$\csc z=\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}z-\left[\frac{1}{5!}-\frac{1}{(3!)^2}\right]z^3+\cdots$$

(ب) $(0<|z|<2\pi)$ $$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}z-\frac{1}{720}z^3+\cdots$$

١١ – أوجد متسلسلة لوران للدالة $1/(z-k)$ للنطاق $|z|>|k|$ ، حيث k عدد حقيقى محققا للمتباينة $-1<k<1$ ؛ ومن ثم ضع $z=e^{i\theta}$ لاشتقاق الصيغتين التاليتين

$$\sum_{n=1}^{\infty} k^n \cos n\theta = \frac{k\cos\theta - k^2}{1-2k\cos\theta + k^2},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} k^n \sin n\theta = \frac{k\sin\theta}{1-2k\cos\theta + k^2}.$$

قارن ذلك بالنتيجة بتمرين (٤) بند (٥٦) .

١٢ - لتكن $F(r,\theta)$ دالة للمتغير $z = r\exp(i\theta)$ وتحليلية فى نطاق حلقى،حول نقطة الأصل ، يحتوى الدائرة $r=1$،إذا أخذنا هذه الدائرة على أنها المنحنى C فى صيغة المعاملات c_n لمتسلسلة لوران،بدلالة قوى z،للدالة $F(r,\theta)$ ، برهن أن

$$F(1,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(1,\phi)\,d\phi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} F(1,\phi)\cos[n(\theta-\phi)]\,d\phi.$$

هذه إحدى صيغ متسلسلة فوريه Fourier Series لدالة $F(1,\theta)$ ذات قيم مركبة ولمتغير حقيقى θ ،على دائرة الوحدة التى مركزها نقطة الأصل . ليكن $u(\theta)$ و $v(\theta)$ هما الجزآن الحقيقى والتخيلى على التعاقب للدالة $F(1,\theta)$. برهن أن المفكوك عاليه يظل صحيحا إذا استبدلنا F فى كل موضع بأى من الدالتين u أو v .إلا أننا ننوه فى هذا الموضع أن هذه القيود على الدوال الحقيقية u و v تعتبر أكثر بكثير مما نحتاجه من كل منهما حتى يكون لها تمثيل على صورة متسلسلة فوريه[١]

(١) لشروط أخرى كافية انظر على سبيل المثال كتاب
R.V. Churchill "Fourier Series and Boundary Value Problems"
الطبعة الثانية ، ص ٩٠ ، ١١٠ ، ١٩٦٣

الفصل السابع

البواقى والأقطاب Residues and Poles

تؤكد نظرية كوشى – جورساه ، السابق ذكرها فى الباب الخامس ، على أنه إذا كانت دالة ما تحليلية عند كل نقطة من نقاط كفاف مغلق بسيط C وكذلك عند كل نقطة داخلية للمنحنى C فإن تكامل هذه الدالة حول هذا المنحنى يساوى صفراً . ولكن إذا كانت الدالة غير تحليلية عند عدد محدود من نقط داخلية المنحنى C فإنه يوجد ، كما سنرى فى هذا الباب ، عدد معين ، يسمى باقى **Residue** ، مناظر لكل نقطة من هذه النقط وسنرى كذلك أن هذه البواقى ستسهم فى تعيين هذا التكامل .

وسنقوم فى هذا الباب بإنماء نظرية البواقى وسنوضحها عن طريق استخدامها لحساب أنواع خاصة من التكاملات المحددة الحقيقية التى تظهر فى الرياضيات التطبيقية .

٦٧ – البواقى Residues

كما سبق وأن ذكرنا (بند (١٩)) فإنه يقال لنقطة z_0 أنها نقطة شاذة لدالة ما f إذا لم تكن f تحليلية عند z_0 ولكنها تكون تحليلية عند نقطة من نقاط أى جوار للنقطة z_0 . يقال لنقطة شاذة z_0 أنها معزولة **Isolated** إذا كان ، بالإضافة إلى ماسبق ، يوجد جوار للنقطة z_0 تكون الدالة f تحليلية عند كل نقطة من نقاطه فيما عدا النقطة z_0 .

والدالة $1/z$ مثال بسيط على ذلك . فهذه الدالة تحليلية عند جميع النقط عدا النقطة $z=0$ وبالتالى فإن نقطة الأصل تكون نقطة شاذة معزولة لهذه الدالة . والدالة

$$\frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$$

لها ثلاث نقط شاذة معزولة هى $z=\pm i$ ، $z=0$

ولكن لاحظ أنه بينما تكون نقطة الأصل نقطة شاذة للدالة $\text{Log}\, z$ فإنها ليست نقطة شاذة معزولة وذلك حيث أن كل جوار لنقطة الأصل يحوى نقاط من الجزء السالب للمحور الحقيقى فى حين أن الدالة $\text{Log}\, z$ ليست تحليلية عند أى من هذه النقط . الدالة

$$\frac{1}{\sin(\pi/z)}$$

لها نقط شاذة عند $z = 1/n$ ، حيث $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. وعند z=o وجميع هذه النقط تقع على جزء المحور الحقيقي بين 1,1- . كل من هذه النقط الشاذة ، عدا النقطة z=o ، هى نقطة شاذة معزولة . أما النقطة الشاذة z=o فليست معزولة وذلك لأن كل جوار لنقطة الأصل يحوى نقاطا شاذة أخرى للدالة .

إذا كانت z_0 نقطة شاذة معزولة للدالة f فإنه يوجد عدد حقيقى موجب r_1 بحيث تكون الدالة f تحليلية عند كل نقطة z بحيث $0 < |z - z_0| < r_1$ فى هذا النطاق تمثل الدالة بمتسلسلة لوران :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots, \qquad (١)$$

حيث المعاملات تعطى بالعلاقات (٢) ، (٣) من بند (٥٩) . وعلى سبيل المثال فإن المعامل b_1 يعطى بالتكامل

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz \qquad (٢)$$

حيث C أى كفاف مغلق بسيط حول z_0 ، واتجاهه الدورانى هو الاتجاه الموجب ، بحيث تكون الدالة f تحليلية عند كل نقطة من نقط C أو داخلية C عدا النقطة z_0 . العدد المركب b_1 ، وهو معامل $1/(z - z_0)$ فى المفكوك (١) ، يسمى باقى **Residue** الدالة f عند النقطة الشاذة المعزولة z_0 .

العلاقة (٢) تمدنا بطريقة فعالة لحساب تكاملات معينة حول كفافات مغلقة بسيطة وعلى سبيل المثال ، دعنا نحسب التكامل

$$\int_C \frac{e^{-z}}{(z - 1)^2}\, dz \qquad (٣)$$

حيث C هو الدائرة $|z| = 2$ مع الاتجاه الدورانى الموجب . الدالة المكاملة

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{(z - 1)^2}$$

دالة تحليلية عند كل نقطة من نقاط C وكل نقطة من نقاط داخليته فيما عدا عند النقطة الشاذة المعزولة z=1 . وبالتالى فإنه ينتج ، من العلاقة (٢) ، أن قيمة التكامل (٣) تساوى $2\pi i$ مضروبا فى باقى الدالة f عند z=1 . ولتعيين هذا الباقى فإننا نستخدم متسلسلة تايلور للدالة e^{-z} حول النقطة z=1 وذلك لكتابة مفكوك لوران على الصورة :

$$\frac{e^{-z}}{(z - 1)^2} = \frac{e^{-1}}{(z - 1)^2} - \frac{e^{-1}}{z - 1} + e^{-1} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - 1)^{n-2}}{n!} \qquad (٤)$$

حيث $0<|z-1|$ ، من هذا نجد أن باق الدالة f عند z=1 يساوى $-e^{-1}$ وبالتالى فإن

$$\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\,dz = -\frac{2\pi i}{e} \qquad (٥)$$

وكمثال آخر ، دعنا نثبت أن

$$\int_C \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 0. \qquad (٦)$$

حيث C هو نفس المنحنى المعطى فى المثال السابق . حيث أن $1/z^2$ تحليلية عند جميع نقط المستوى المركب عدا نقطة الأصل فكذلك تكون الدالة المكاملة $\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$. النقطة الشاذة المعزولة z=o نقطة داخلية للمنحنى C ، وبالتالى فباستخدام متسلسلة ماكلورين للدالة الأسية يمكننا كتابة مفكوك لوران على الصورة :

$$\exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^6} + \cdots$$

حيث $0<|z|$. وبالتالى فإن باق الدالة المكاملة عند النقطة الشاذة المعزولة z=o يساوى صفرا (أى أن $b_1=o$) ، وهذا يعطى القيمة المطلوبة للتكامل (٦) .

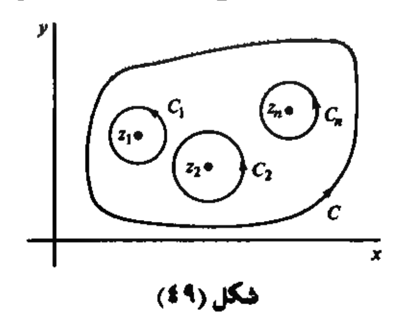
٦٨ – نظرية الباق The Residue Theorem

إذا كان للدالة f عدد محدود فقط من النقط الشاذة ، تنتمى إلى داخلية كفاف مغلق بسيط C ، فإن هذه النقط الشاذة لابد وأن تكون معزولة . النظرية التالية هى الصياغة الدقيقة لحقيقة أن قيمة تكامل الدالة f حول C يساوى $2\pi i$ مضروبا فى مجموع البواق المناظرة لهذه النقط الشاذة .

نظرية : افرض أن C كفاف مغلق بسيط ، وأن f دالة تحليلية عند جميع نقط C وجميع نقط داخلية C عدا عدد محدود من النقط $z_1, z_2, \ldots, z_n$ التى تنتمى إلى داخلية C . إذا كانت $B_1, B_2, \ldots, B_n$ بواق الدالة f عند هذه النقط على الترتيب فان

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i(B_1 + B_2 + \cdots + B_n) \qquad (١)$$

حيث الاتجاه الدورانى للمنحنى C هو الاتجاه الموجب .



شكل (٤٩)

لإثبات هذه النظرية ، افرض أن النقط z_j مراكز دوائر C_j اتجاهها الدورانى هو الاتجاه الموجب وتقع كل منها بأكملها فى داخلية C ، وصغيرة صغرا كافيا بحيث لا تتقاطع أى اثنتين منها (شكل (٤٩)) . الدوائر C_j مع الكفاف المغلق البسيط C تمثل حدود منطقة تكون فيها الدالة f تحليلية ، كما أن داخليتها تمثل نطاقاً متعدد الترابط . وبالتالى ، فمن تعميم نظرية كوشى – جورساه على مثل تلك المناطق (بند (٤٩)) ، ينتج أن :

$$\int_C f(z)\,dz - \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz - \cdots - \int_{C_n} f(z)\,dz = 0.$$

وهذه المعادلة الأخيرة تؤول إلى المعادلة (١) المطلوبة وذلك لأن

$$B_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_j} f(z)\,dz \qquad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

وهذا يكمل برهان النظرية .

ولتوضيح هذه النظرية دعنا نوجد قيمة التكامل

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}\,dz \qquad (٢)$$

حيث C الدائرة $|z| = 2$ موجهة فى اتجاه ضد عقرب الساعة . الدالة المكاملة لها نقطتان شاذتان هما $z = 1$ و $z = 0$ ، وكلتا هما تنتمى إلى داخلية المنحنى C المعطى . باستخدام متسلسلة ماكلورين

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots \qquad (|z| < 1)$$

يمكننا حساب البواقى B_1, B_2 عند $z = 1$ و $z = 0$ على الترتيب . لذلك نكتب أولا مفكوك لوران

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \left(5 - \frac{2}{z}\right)\left(\frac{-1}{1-z}\right) = \left(-5 + \frac{2}{z}\right)(1 + z + z^2 + \cdots)$$
$$= \frac{2}{z} - 3 - 3z - 3z^2 - \cdots$$

، حيث $0 < |z| < 1$ ، للدالة المكاملة ومنها نرى أن $B_1 = 2$. بعد ذلك نلاحظ أن

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \left(5 + \frac{3}{z-1}\right)\left[\frac{1}{1+(z-1)}\right]$$
$$= \left(5 + \frac{3}{z-1}\right)[1 - (z-1) + (z-1)^2 - \cdots]$$

، حيث $0 < |z-1| < 1$ معامل $1/(z-1)$ فى مفكوك لوران عندما $0 < |z-1| < 1$ يساوى ثلاثة . من هذا ينتج أن $B_2 = 3$. وبالتالى فإن

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}\,dz = 2\pi i(B_1 + B_2) = 10\pi i.$$

فى هذا المثال نلاحظ أنه من الأبسط ، بطبيعة الحال ، أن نكتب الدالة المكاملة كمجموع لكسريها الجزئيين ، وبالتالى فإن

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}\,dz = \int_C \frac{2}{z}\,dz + \int_C \frac{3}{z-1}\,dz = 4\pi i + 6\pi i = 10\pi i.$$

٦٩ – الجزء الأساسى من دالة The Principal Part of a Function

كما رأينا فإنه إذا كان لدالة ما f نقطة شاذة معزولة z_0 ، فإن الدالة يمكن تمثيلها بمتسلسلة لوران :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \tag{١}$$

فى نطاق ما $0 < |z-z_0| < r_1$ مركزه z_0 . جزء هذه المتسلسلة الذى يحوى القوى السالبة للمقدار $z-z_0$ يسمى **الجزء الأساسى** **Principal part** من الدالة f عند z_0 . سنقوم الآن باستخدام الجزء الأساسى من دالة ما للتمييز بين أنواع ثلاث من النقط الشاذة المعزولة ، يكون سلوك الدالة قرب أى منها مختلف اختلافا أساسيا عن سلوكها بالقرب من أى من النقطتين الأخريين .

إذا كانت فئة الحدود غير الصفرية فى الجزء الأساسى من f عند z_0 غير خالية وتحتوى على عدد محدود من العناصر ، فإنه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث $b_m \neq 0$ ، $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0$ أى أن المفكوك (١) يكون على الصورة

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} \tag{٢}$$

حيث $0 < |z-z_0| < r_1$. فى هذه الحالة تسمى النقطة الشاذة المعزولة z_0 **قطبا** **Pole** من درجة m. القطب من درجة m = 1 يسمى قطباً بسيطاً **Simple pole** .

فعلى سبيل المثال ، الدالة

$$\frac{z^2-2z+3}{z-2} = 2 + (z-2) + \frac{3}{z-2}$$

حيث $0 < |z-2|$ ، لها قطب بسيط عند z = 2 . وباقى هذه الدالة عند القطب z = 2 يساوى ثلاثة . والدالة

$$\frac{\sinh z}{z^4} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}z + \frac{1}{7!}z^3 + \cdots$$

، حيث $0 < |z|$ ، لها قطب درجته $m = 3$ عند $z = 0$ ، وأن الباقى لهذه الدالة عند $z = o$ يساوى سدس .

كما سنرى فى البند التالى ، الدالة $f(z)$ تؤول دائماً إلى مالا نهاية عندما تقترب z من قطب ما .

عندما يحوى الجزء الأساسى من دالة f عند z_0 عددا لا نهائياً من الحدود الغير صفرية فإن النقطة z_0 يقال لها **نقطة شاذة أساسية Essential singular point** . كمثال لهذا النوع الدالة

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \qquad (٣)$$

، حيث $0 < |z|$ ، التى لها نقطة شاذة أساسية عند $z = o$. وباقى هذه الدالة عند $z = o$ يساوى 1 .

وقد توصل بيكار **Picard** إلى نتيجة هامة تصف سلوك دالة ما بالقرب من نقطة شاذة أساسية وهذه النتيجة تنص على أنه فى أى جوار لنقطة شاذة أساسية تأخذ الدالة كل قيمة محدودة ، مع استثناء وحيد محتمل ، عددًا لا نهائيا من المرات . ولن نقوم بإثبات نظرية بيكار ، ولكننا سنقوم فيما بعد (فى بند (١١٢)) بإثبات نتيجة مقاربة جدا لها.*

لتوضيح نظرية بيكار دعنا نبين أن الدالة $\exp(1/z)$ المعطاة فى المعادلة (٣) تأخذ القيمة 1- . عددا لانهائيا من المرات فى أى جوار لنقطة الأصل . لذلك تذكر أن (بند (٢٢)) $\exp z = -1$ عندما $z = (1 + 2n)\pi i$ ، حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ، وهذا يعنى أن $\exp(1/z) = -1$ عند النقط

$$z = \frac{1}{(1 + 2n)\pi i} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

التى يحتوى أى جوار لنقطة الأصل على عدد لا نهائى منها .

لاحظ أن $|\exp(1/z)| \neq 0$ لأى عدد مركب z وبالتالى فإن الصفر يكون هو القيمة المستثناة التى لا تأخذها الدالة .

عندما تكون كل المعاملات b_n فى الجزء الأساسى من دالة f عند نقطة شاذة معزولة z_0 مساوية للصفر فإن النقطة z_0 يقال لها **نقطة شاذة مزالة Removable singular point** للدالة f . فى هذه الحالة تحوى متسلسلة لوران (١) القوى الغير سالبة فقط للعدد $z-z_0$ ،

---

* لبرهان نظرية بيكار ، انظر بند (٥١) من المجلد الثالث من كتب Markushevich المذكورة فى ملحق (١) .

أى أن المتسلسلة تكون فى هذه الحالة متسلسلة قوى . إذا عرفنا f على أنها تساوى a_0 عند z_0 فإن الدالة تصبح تحليلية عند z_0 (انظر نظرية (٢) من بند (٦٢)) . وبالتالى فإن الدالة f التى لها نقطة شاذة مزالة يمكن جعلها تحليلية عند هذه النقطة وذلك بتحديد قيمة مناسبة للدالة عند تلك النقطة .

فمثلا الدالة

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

، حيث $0 < |z|$ ، لها نقطة شاذة مزالة عند $z = 0$. إذا كتبنا $f(0) = 1$ فإن الدالة تصبح شاملة .

٧٠ – الأقطاب Poles

افرض أن الدالة f لها قطب من درجة m عند z_0 . دعنا نعرف دالة جديدة ϕ بالمعادلة

$$\phi(z) = (z - z_0)^m f(z).$$

من معادلة (٢) بالبند السابق نجد أن

$$\phi(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + b_{m-2}(z - z_0)^2 + \cdots + b_1(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{m+n} \qquad (١)$$

حيث $0 < |z - z_0| < r_1$ ، $b_m \neq 0$. وبالتالى فإن النقطة z_0 تكون نقطة شاذة مزالة للدالة ϕ . دعنا نكتب

$$\phi(z_0) = b_m$$

وذلك حتى تصبح الدالة ϕ تحليلية عند z_0 . لاحظ أن كون الدالة تحليلية عند نقطة ما يستتبع أن تكون متصلة عند نفس النقطة وبالتالى فإن تعريفنا للمقدار $\phi(z_0)$ يمكن كتابته على الصورة

$$\phi(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = b_m. \qquad (٢)$$

حيث أن هذه النهاية متحققة و $b_m \neq 0$ فإنه ينتج أن f(z) تؤول إلى مالا نهاية عندما تقترب z من z_0 (انظر تمرين (١١) بند (٧١)).

بالإضافة إلى ذلك فإنه يمكن استخدام الدالة ϕ لتعيين باق الدالة f عند القطب z_0 . هذا الباق هو المعامل b_1 فى متسلسلة لوران (٢) من البند السابق . وحيث أن (١) هى متسلسلة تايلور للدالة ϕ حول النقطة z_0 فإن العدد b_1 يعطى بالعلاقة

$$b_1 = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \qquad (٣)$$

وعندما تكون $m=1$ فإن صيغة باقي الدالة f عند القطب البسيط z_0 يمكن كتابتها ، وذلك حسب معادلة (٢) ، على الصورة

$$b_1 = \phi(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \qquad (٤)$$

افرض أننا أعطينا الآن دالة f بحيث يكون حاصل الضرب

$$(z - z_0)^m f(z)$$

معرفا عند z_0 بحيث يكون تحليليا عندها . كما سبق ، m عدد صحيح موجب . نفرض أن $\phi(z)$ ترمز إلى حاصل الضرب المذكور أعلاه . إذن ، لأى نقطة z فى قرص مفتوح حول z_0 ،

$$\phi(z) = (z - z_0)^m f(z) = \phi(z_0) + \phi'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{\phi^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m + \cdots.$$

وبالتالى فإنه عند أى نقطة من نقاط هذا القرص المفتوح ، عدا النقطة z_0 ،

$$f(z) = \frac{\phi(z_0)}{(z - z_0)^m} + \frac{\phi'(z_0)}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}\frac{1}{z - z_0} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-m}.$$

إذا كان $\phi(z_0) \neq 0$ فإنه ينتج أن f لها قطب من درجة m عند z_0 وأن باقى الدالة f عند z_0 يعطى بأى من العلاقتين (٣) أو (٤) . النظرية التالية تمكننا من اختبار أن دالة ما لها قطب عند نقطة معينة .

نظرية : نفرض أن f دالة ما معطاة وأنه لعدد صحيح موجب m تكون الدالة

$$\phi(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

معرفة عند z_0 بحيث تكون تحليلية عندها وبحيث $\phi(z_0) \neq 0$. إذن f يكون لها قطب من درجة m عند z_0 وباقى الدالة f عند z_0 يعطى بالعلاقة (٣) إذا كانت $m > 1$ وبالعلاقة (٤) إذا كانت $m = 1$.

لاحظ أن الشروط الواردة فى النظرية تكون متحققة دائماً طالما كانت الدالة f على الصورة

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

حيث الدالة $\phi(z)$ تحليلية عند z_0 و $\phi(z_0) \neq 0$.

وكإيضاح لذلك ، نلاحظ أن الدالة $f(z) = e^{-2z}/z^3$ لها قطب من درجة $m = 3$ عند

$z = 0$. فى هذه الحالة تكون $\phi(z) = e^{-2z}$. وبالتالى ينتج ، من العلاقة (٣) ، أن باقى f عند $z = 0$ يساوى $\phi^{(2)}(0)/2! = 2$.

وكمثال لإيضاح العلاقة (٤) ، نلاحظ أن الدالة $f(z) = (z+1)/(z^2+9)$ لها قطب بسيط عند $z = 3i$ وأن الباقى عند هذه النقطة هو

$$\lim_{z \to 3i} (z - 3i) \frac{z+1}{z^2+9} = \lim_{z \to 3i} \frac{z+1}{z+3i} = \frac{3-i}{6}.$$

النقطة $z = -3i$ هى أيضاً قطب بسيط للدالة المعطاة ، وباقى الدالة عندها يساوى $(3+i)/6$.

٧١ – قسمة الدوال التحليلية Quotients of Analytic Functions

الطريقة الأساسية لحساب باقى دالة ما عند نقطة شاذة معزولة z_0 هى الاستخدام المباشر لمتسلسلة لوران المناسبة وإيجاد معامل $1/(z - z_0)$ فيها . عندما تكون z_0 نقطة شاذة أساسية ، فإننا لن نقدم طريقة أخرى بديلة لحساب البواقى ، ولكن لحساب البواقى عند الأقطاب فإنه يمكن استخدام الصيغتين (٣) و (٤) السالف ذكرهما فى البند السابق عندما تكون الدالة ϕ بسيطة بدرجة كافية .

وتوجد طريقة أخرى لحساب باقى دالة ما f عند قطب z_0 للدالة إذا كان بالإمكان كتابة f على صورة كسر :

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \tag{١}$$

حيث كلا من p,q دالة تحليلية عند z_0 وبحيث $p(z_0) \neq 0$. ويجب أولا ملاحظة أن z_0 تكون نقطة شاذة معزولة للدالة f إذا وفقط إذا كان $q(z_0) = 0$. لأنه إذا كان $q(z_0) = 0$ فإن $q(z) \neq 0$ عند أى نقطة أخرى فى جوار ما للنقطة z_0 ، وهذا يرجع إلى أن أصفار الدالة التحليلية التى لا تنعدم تطابقيا (أى لكل نقطة z) تكون معزولة (بند (٦٦)) . من هذا ينتج أن الدالة f تكون تحليلية عند كل نقطة من نقط هذا الجوار للنقطة z_0 ، فيما عدا عند النقطة z_0 نفسها ، وبالتالى فإن z_0 تكون نقطة شاذة معزولة للدالة f . وبالعكس ، إذا كانت z_0 نقطة شاذة معزولة للدالة f فإن $q(z_0) = 0$. وذلك لأنه إذا كانت $q(z_0) \neq 0$ فإنه ينتج من اتصال الدالة f أن $q(z) \neq 0$ عند كل نقطة z من نقط جوار ما للنقطة z_0 (انظر تمرين (١١) من بند (١٥)) . من هذا ينتج أن الدالة f تحليلية عند z_0 وهذا يناقض حقيقة أن z_0 نقطة شاذة معزولة للدالة f .

الدالة f المعطاة بالمعادلة (١) لها قطب بسيط عند z_0 إذا تحقق ، بالإضافة إلى الشروط الأخرى السالفة الذكر ، كل من الشرطين $q(z_0) = 0$ و $q'(z_0) \neq 0$. ويعطى باقى الدالة f

عند القطب البسيط z_0 بالعلاقة

$$b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \tag{٢}$$

لإثبات ذلك فإننا نعتبر مفكوك تايلور ، المتحقق فى القرص $|z - z_0| < r_1$ ، لكل من الدالتين التحليليتين p,q، ونكتب

$$(z - z_0)f(z) = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + \cdots}{q'(z_0) + q''(z_0)(z - z_0)/2! + \cdots} \tag{٣}$$

حيث $0 < |z - z_0| < r_1$

خارج قسمة هاتين المتسلسلتين يمثل دالة ϕ تحليلية عند z_0 ، وحيث أن $\phi(z_0) = p(z_0)/q'(z_0) \neq 0$ فإن البرهان يمكن إكماله بسهولة باستخدام النظرية المذكورة فى البند السابق .

باتباع نفس الأسلوب يمكننا إثبات أنه إذا كانت الدالة f تحقق ، بالإضافة إلى الشروط السالف ذكرها التى تحققها كل من الدالتين p,q ، الشروط التالية :

$$q(z_0) = q'(z_0) = \cdots = q^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad , \quad q^{(m)}(z_0) \neq 0$$

فإن الدالة f يكون لها قطب من درجة m عند z_0 . عندما $m = 2$ ، يعطى باق الدالة f عند القطب z_0 (من درجة $m = 2$) بالعلاقة

$$b_1 = 2\frac{p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{p(z_0)q'''(z_0)}{[q''(z_0)]^2}, \tag{٤}$$

التى يمكن إيجادها بحساب $\phi'(z_0)$ ، حيث

$$\phi(z) = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + \cdots}{q''(z_0)/2! + q'''(z_0)(z - z_0)/3! + \cdots}$$

وحيث $0 < |z - z_0| < r_1$.

عندما $m > 2$ فإن الصيغ المناظرة لحساب البواق تكون طويلة جدا .

لتوضيح العلاقة (٢) دعنا نعتبر الدالة

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

التى لها النقط الشاذة المعزولة $z = n\pi$ ، حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. بكتابة $q(z) = \sin z,$ و $p(z) = \cos z$ فإننا نجد أن كلا من هذه النقط تكون قطبا بسيطا للدالة $\cot z$ وأن باق هذه الدالة عند كل من هذه الأقطاب البسيطة يساوى

$$b_1 = \frac{p(n\pi)}{q'(n\pi)} = \frac{\cos n\pi}{\cos n\pi} = 1.$$

كمثال آخر ، دعنا نحسب باق الدالة

$$f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$$

عند نقطة الأصل . فى هذا المثال $p(z) = 1$ ، $q(z) = z(e^z - 1)$ ، $q(0) = q'(0) = 0$ ، $q''(0) = 2$ ، $q'''(0) = 3$. وبالتالى فإن نقطة الأصل تكون قطباً من درجة $m = 2$ ، وباق الدالة f عند هذا القطب يساوى $-1/2$ (وذلك باستخدام العلاقة (٤)) .

تمــاريـــن

١ - أوجد فى كل حالة الجزء الأساسى من الدالة عند نقطتها الشاذة المعزولة . بين ما إذا كانت هذه النقطة الشاذة قطبا ، أو نقطة شاذة أساسية ، أو نقطة شاذة مزالة للدالة المعطاة .

(أ) $ze^{1/z}$ ، (ب) $\frac{z^2}{1+z}$ ، (جـ) $\frac{\sin z}{z}$ ، (د) $\frac{\cos z}{z}$

٢ - اثبت أن جميع النقط الشاذة لكل من الدوال المعطاة التالية تكون أقطابا . أوجد الدرجة m لكل قطب والباق المناظر B .

(أ) $\frac{z+1}{z^2 - 2z}$ ، (ب) $\tanh z$ ، (جـ) $\frac{1 - \exp(2z)}{z^4}$

(د) $\frac{\exp(2z)}{(z-1)^2}$ ، (هـ) $\frac{z}{\cos z}$ ، (و) $\frac{\exp z}{z^2 + \pi^2}$

الأجوبة : (أ) $B = -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ ، $m = 1$ ، (ب) $m = 1, B = 1$ ، (جـ) $B = -\frac{4}{3}$ ، $m = 3$

٣ - أوجد الباق عند $z = 0$ لكل من الدوال

(أ) $\csc^2 z$ ، (ب) $z^{-3} \csc(z^2)$ ، (جـ) $z \cos \frac{1}{z}$

الأجوبة : (أ) صفر ، (ب) $1/6$ ، (جـ) $-1/2$.

٤ - أوجد قيمة التكامل

$$\int_C \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)} dz$$

حيث C الدائرة موجهة ضد عقرب الساعة ،

(أ) $|z - 2| = 2$ ، (ب) $|z| = 4$.

الأجوبة : (أ) πi ، (ب) $6\pi i$

٥ - اوجد قيمة التكامل

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$$

حيث C الدائرة ، موجهة ضد عقرب الساعة ،

(أ) $|z| = 2$ ، (ب) $|z+2| = 3$

الأجوبة : (أ) $\pi i/32$ ، (ب) صفر .

٦ افرض أن C الدائرة $|z| = 2$ مع الاتجاه الدورانى الموجب واحسب كل من التكاملات

(أ) $\int_c \tan z\, dz$ ، (ب) $\int_c \frac{dz}{\sinh 2z}$ ، (ج) $\int_c \frac{\cosh \pi z\, dz}{z(z^2+1)}$

الأجوبة : (أ) $-4\pi i$ ، (ب) $-\pi i$

٧ أوجد قيمة تكامل الدالة f حول دائرة الوحدة التى مركزها نقطة الأصل مع الاتجاه الدورانى الموجب إذا كانت f(z) هى

(أ) $z^{-2}e^{-z}$ ، (ب) $z^{-1} \csc z$ ، (ج) $z^{-2} \csc z$ ، (د) $z \exp \frac{1}{z}$

الأجوبة : (أ) $-2\pi i$ ، (ب) صفر ، (ج) πi

٨ - أوجد قيمة التكامل (٢) من بند (٦٨) وذلك بإيجاد معامل $1/z$ فى مفكوك لوران للدالة المكاملة

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{5z-2}{z^2} \frac{1}{1-(1/z)}$$

بدلالة قوى z حيث نطاق تحقق هذا المفكوك هو $1 < |z|$. لاحظ ، مع ذلك ، أن المعامل الذى نحصل عليه ليس باق الدالة المكاملة عند $z = 1$.

٩ - أوجد الباق عند النقطة $z = 1$ لفرع الدالة المتعددة القيم

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{1-z}$$

الذى نحصل عليه بقصر arg z بحيث $(2n-1)\pi < \arg z < (2n+1)\pi$ حيث n عدد صحيح .

الإجابة : $(-1)^{n+1}$

١٠ - إفرض أن f دالة تحليلية عند النقطة z_0 . إثبت أن z_0 نقطة شاذة مزالة للدالة

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$$

عندما $f(z_0) = 0$. إثبت أنه عندما $f(z_0) \neq 0$ فإن النقطة z_0 تكون قطبا بسيطا للدالة g وأن باق g عند z_0 يساوى $f(z_0)$.

١١ - باستخدام العلاقة (٢) من بند (٧٠) لحساب العدد b_m ، اثبت أن

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

عندما يكون z_0 قطبا للدالة f .

اقتراح : لاحظ أنه يوجد عدد موجب δ بحيث

$$|b_m - (z-z_0)^m f(z)| < \tfrac{1}{2}|b_m| \quad \text{طالما} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

ثم استخدم المتباينة $|z_1 - z_2| \geqq |z_2| \quad |z_1|$

١٢ اثبت أنه إذا كانت دالة ما $f(z)$ تحليلية عند z_0 وإذا كان z_0 صفرا من درجة m للدالة $f(z)$ فإن الدالة $1/f(z)$ يكون لها قطب من درجة m عند z_0 .

١٣ – افرض أن $f(z)$ دالة تحليلية فى نطاق بسيط الترابط D وأن z_0 هو الصفر الوحيد للدالة $f(z)$ فى D . اثبت أنه إذا كان C كفافا مغلقا بسيطاً فى D اتجاهه الدورانى هو الاتجاه الموجب وبحيث $z_0 \; \varepsilon \; C$ ، فإن

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = m$$

حيث العدد الصحيح الموجب m رتبة صفرية الدالة. الكسر $f'(z)/f(z)$ هو مشتقة الدالة $\log f(z)$ ويعرف بالمشتقة اللوغاريتمية للدالة $f(z)$.

١٤ – باستخدام نتيجة تمرين (١٣) ، اثبت الخاصية التالية للمشتقة اللوغاريتمية المعرفة أعلاه . افرض أن D نطاق بسيط الترابط تكون فيه الدالة f تحليلية ، $f'(z) \neq 0$ وافرض أن C كفاف مغلق بسيط فى D اتجاهه الدورانى هو الاتجاه الموجب . وبحيث $f(z) \neq 0$ عند أى نقطة من نقط C . إذا كان للدالة f أصفار عددها N تنتمى إلى داخلية C ، فإن

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

٧٢ – حساب التكاملات الحقيقية المعتلة Evaluation of Improper Real Integrals

تطبيق هام لنظرية البواق هو استخدامها فى حساب أنواع خاصة من التكاملات الحقيقية المحددة . الأمثلة التى ستطرح هنا وفى بقية هذا الباب توضح هذا الاستخدام لتلك النظرية .

من مبادىء حساب التفاضل والتكامل نعلم أن التكامل المعتل الذى على الصورة

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx, \tag{١}$$

حيث الدالة المكاملة f متصلة لجميع قيم x ، يقال له **تكامل تقاربى Convergent integral** وأن قيمته هى

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0} f(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} f(x)\,dx \tag{٢}$$

إذا تحقق وجود كل من النهايتين . هناك عدد آخر مرتبط بالتكامل (١) ، ومفيد أيضاً ، يقال له **قيمة كوشى الأساسية Cauchy principal value** للتكامل (١) ويعرف بالمعادلة

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx, \tag{٣}$$

بشرط تحقق وجود النهاية فى الطرف الأيمن .

إذا كان التكامل (١) تقاربيا ، فإن قيمة التكامل التى نحصل عليها تكون هى نفسها قيمة كوشى الأساسية للتكامل . من ناحية أخرى ، فإذا كانت $f(x) = x$ مثلا ، فإننا نجد أن قيمة كوشى الأساسية للتكامل (١) تساوى صفراً ، بينما لا يكون هذا التكامل تقاربيا حسب تعريف (٢) . ولكن إذا افترضنا أن f دالة زوجية (أى أن $f(-x) = f(x)$ لكل عدد حقيقى x) ، فإننا نجد أنه إذا تحقق وجود قيمة كوشى الأساسية للتكامل (١) فإن التكامل (١) يكون تقاربيا . وذلك لأنه فى هذه الحالة يكون

$$\int_{-R}^{0} f(x)\, dx = \int_{0}^{R} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} f(x)\, dx;$$

وتحقق وجود النهاية فى الصيغة (٣) يؤدى إلى تحقق وجود كل من النهايتين فى الصيغة (٢) .

افرض الآن أن الدالة المكاملة f(x) فى التكامل (١) يمكن كتابتها على الصورة $f(x) = p(x)/q(x)$ حيث p,q كثيرتى حدود حقيقية ليس بينهما عوامل مشتركة وأن q(x) ليست لها أى أصفار حقيقية . إذا كانت درجة q(x) أكبر من درجة p(x) على الأقل بدرجتين فإن التكامل يكون تقاربيا . ويمكننا فى كثير من الأحوال حساب القيمة التى يقترب منها هذا التكامل بسهولة وذلك بإيجاد قيمة كوشى الأساسية له مستخدمين فى ذلك نظرية البواقى.

ولتوضيح الطريقة ، دعنا نوجد قيمة التكامل التقاربى

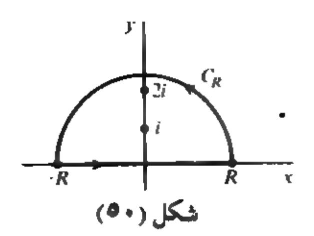
$$\int_{0}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx. \tag{٤}$$

لاحظ أن التكامل فى الطرف الأيمن يمثل تكاملا للدالة

$$(z) = \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} = \frac{2z^2 - 1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$$

على امتداد المحور الحقيقى . وهذه الدالة لها أقطاب بسيطة عند النقط $z = \pm i$ ، $z \pm 2i$ وهى تحليلية فيما عدا ذلك .

عندما $R > 2$ ، فإن النقط الشاذة للدالة f فى نصف المستوى العلوى تنتمى إلى داخلية المنطقة النصف دائرية المحدودة بالقطعة المستقيمة $-R \leq x \leq R,\ y = 0$ على محور السينات والنصف العلوى C_R من الدائرة $|z| - R$ (شكل (٥٠)) .



شكل (٥٠)

بمكاملة الدالة f فى اتجاه ضد عقرب الساعة حول حدود هذه المنطقة النصف دائرية فإننا نجد أن

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i(B_1 + B_2) \qquad (٥)$$

حيث B_1 هو باق الدالة f عند النقطة $z = i$ ، B_2 هو باق الدالة f عند النقطة $z = 2i$. من العلاقة (٤) بند (٧٠) نعلم أن

$$B_1 = \lim_{z \to i} (z - i)f(z) = \frac{i}{2}$$

و

$$B_2 = \lim_{z \to 2i} (z - 2i)f(z) = -\frac{3i}{4}$$

وبالتالى فإن المعادلة (٥) يمكن كتابتها على الصورة

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_{C_R} f(z)\,dz. \qquad (٦)$$

وهذه المعادلة الأخيرة صحيحة لجميع قيم R أكبر من اثنين .

سنبين الآن أن قيمة التكامل فى الطرف الأيمن من المعادلة (٦) تقترب من الصفر عندما تؤول R إلى ∞ . لتحقيق ذلك ، لاحظ أن

$$|z^4 + 5z^2 + 4| = |z^2 + 1||z^2 + 4| \geqq (|z|^2 - 1)(|z|^2 - 4)$$

إذن ، عندما تكون z نقطة من نقاط C_R،

$$|z^4 + 5z^2 + 4| \geqq (R^2 - 1)(R^2 - 4).$$

كذلك ، لكل نقطه من نقط C_R،

$$|2z^2 - 1| \leqq 2|z|^2 + 1 = 2R^2 + 1.$$

وبالتالى فإن

$$\left|\int_{C_R} \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4}\,dz\right| \leqq \frac{2R^2 + 1}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}\,\pi R,$$

حيث πR طول القوس C_R . بهذا تتضح النهاية المطلوبة ، أى أن

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

وبالتالى فإنه ينتج من المعادلة (٦) أن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx=\frac{\pi}{2},$$

أو

$$\text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx=\frac{\pi}{2};$$

وحيث أن هذا التكامل يكون فى الحقيقة تقاربيا فإننا نصل إلى النتيجة

$$\int_{0}^{\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx=\frac{\pi}{4}.$$

٧٣ – التكاملات المعتلة المشتملة على دوال مثلثية

Improper Integrals Involving Trigonometric Functions

نظرية البواقى قد تكون مفيدة أيضاً فى حساب التكاملات المعتلة التقاربية التى على أى من الصورتين

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos x\,dx \qquad \text{و} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\sin x\,dx \tag{١}$$

حيث $q(x)$ و $p(x)$ كثيرتى حدود حقيقية ، $q(x)$ ليس لها أصفار حقيقيةالطريقة التى استخدمت فى البند السابق لا يمكن استخدامها مباشرة هنا وذلك حيث أن كلا من $\cos z$ ، و $|\sin z|$ تزداد مثل $\sinh y$ أو e^{y} وذلك عندما تؤول y إلى ∞ (بند (٢٤)) .
ومع هذا فإننا نلاحظ أن التكاملين (١) هما الجزآن الحقيقى والتخيلى للتكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}e^{ix}\,dx$$

وأن مقياس e^{iz} يساوى e^{-y} . لاحظ أن e^{-y} محدودة فى نصف المستوى العلوى .
لتوضيح التعديل الذى أجريناه على الطريقة السابقة ، دعنا نبين الآن أن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{\pi}{e}. \tag{٢}$$

هذا التكامل هو الجزء الحقيقى للتكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx$$

الذى يمثل بدوره تكامل الدالة

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$$

على المحور الحقيقى .

الدالة f تحليلية فيما عدا عند القطبين $z=\pm i$ من درجة $m=2$. القطب $z=i$ ينتمى

إلى داخلية المنطقة النصف دائرية التى حدودها القطعة المستقيمة $y=0$ و $-R \leqq x \leqq R$ على المحور الحقيقى والنصف العلوى C_R من الدائرة $|z|=R$ ، حيث $R>1$. بمكاملة الدالة f فى إتجاه ضد عقرب الساعة حول حدود هذه المنطقة نجد أن

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\, dx = 2\pi i B_1 - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\, dz \qquad (٣)$$

حيث B_1 باق f عند القطب $z=i$. لحساب هذا الباق ، اكتب

$$\phi(z) = (z-i)^2 f(z) = \frac{e^{iz}}{(z+i)^2}.$$

و بالتالى فإن صيغة (٣) بند (٧٠) تعطى

$$B_1 = \phi'(i) = -\frac{i}{2e}. \qquad (٤)$$

لنبين أن التكامل الثانى فى (٣) يقترب من الصفر عندما تؤول R إلى ∞ ، فإننا نلاحظ أنه عندما تنتمى z إلى C_R فإن

$$|z^2+1|^2 \geqq (R^2-1)^2.$$

إذن ،

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\, dz\right| \leqq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}$$

وذلك حيث أن

$$|e^{iz}| = |e^{-y}| \leqq 1$$

عندما $y \geqq 0$.

من هذه المتباينة ومعادلتى (٣) ، (٤) ينتج أن

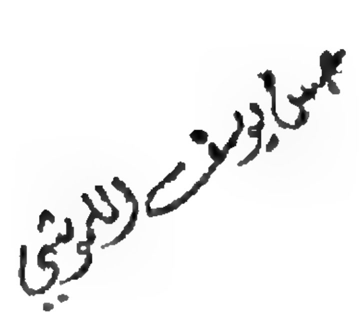
$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{\pi}{e}. \qquad (٥)$$

أى أن ،

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{\pi}{e},$$

وذلك بمساواة الجزئين الحقيقيين فى طرف المعادلة (٥).

إذن ، قيمة كوشى الأساسية للتكامل (٢) موجودة وتساوى π/e . بالإضافة إلى ذلك ، فإنه يمكننا استنتاج أن التكامل (٢) يؤول إلى القيمة π/e وذلك لأن الدالة المكاملة فى (٢) دالة زوجية .



تماريـــن

تحقق من صحة قيم التكاملات المعطاة وذلك باستخدام البواق:

١ - $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{2}$ ، ٢ - $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

٣ - $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{\pi}{6}$ ، ٤ $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{4}$

٥ - $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}=\frac{\pi}{200}$ ، ٦ - $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^6+1}=\frac{\pi}{6}$

٧ - $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-a}$ ، حيث $a\geqq 0$

٨ - $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx=\frac{\pi}{4b^3}(1+ab)e^{-ab}$ ، حيث $a>0, b>0$

٩ - $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b}-\frac{e^{-a}}{a}\right)$ ، حيث $a>b>0$

١٠ - $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin ax}{x^4+4}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-a}\sin a$ ، حيث $a>0$

أوجد قيمة كوشي الأساسية لكل من التكاملات التقاربية التالية :

١١ - $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

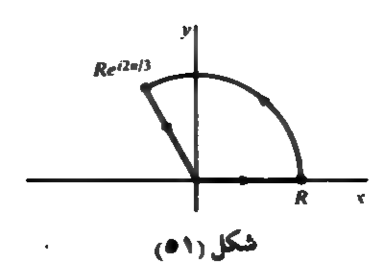
١٢ - $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$. الإجابة : $-\pi/5$

١٣ - $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}$.

١٤ - $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

١٥ - $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^2+4x+5}$. الإجابة: $-(\pi/e)\sin 2$

١٦ - $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x\,dx}{(x+a)^2+b^2}$ ، حيث $b>0$



شكل (٥١)

١٧ - استخدم البواق والكفاف المبين بشكل (٥١) للتحقق من صحة قيمة التكامل

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

٧٤ - التكاملات المحددة للدوال المثلثية

Definite Integrals of Trigonometric Functions

استخدام البواق مفيد أيضاً فى حساب تكاملات محددة معينة من النوع

$$\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta. \qquad (١)$$

وحقيقة أن θ تتغير من صفر إلى 2π يجعل من الممكن اعتبار θ سعة ما لنقطة z تنتمى لدائرة الوحدة C التى مركزها نقطة الأصل ، وبالتالى فإننا نكتب $z = e^{i\theta}$ بحيث $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ عند استخدام هذا التعويض والمعادلات المصاحبة

$$\sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}, \qquad (٢)$$

يؤول التكامل (١) إلى التكامل الكفافى

$$\int_C F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz} \qquad (٣)$$

لدالة للمتغير z حول الدائرة C موجهة فى الاتجاه الموجب . وبالطبع فالتكامل (١) صورة بارامترية للتكامل (٣) وذلك حسب الصيغة (٢) بند (٤٤) . عندما تكون الدالة المكاملة فى التكامل (٣) دالة قياسية للمتغير z فإنه يمكننا حساب هذا التكامل باستخدام نظرية الباق حال تحديدنا أصفار كثيرة الحدود فى المقام شريطة أن لا ينتمى أى منها للدائرة C .

لتوضيح ذلك ، دعنا نثبت أن

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \qquad (-1 < a < 1). \qquad (٤)$$

هذه العلاقة صحيحة بالطبع عندما $a = 0$ ، ولذلك سنستبعد هذه الحالة من البرهان . باستخدام التعويضات (٢) ، يؤول التكامل المعطى إلى

$$\int_C \frac{2/a}{z^2 + (2i/a)z - 1}\, dz \qquad (٥)$$

حيث C هو الدائرة $|z| = 1$ مع الاتجاه الدورانى الموجب . أصفار مقام الدالة المكاملة هى

$$z_1 = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}\right)i, \quad z_2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}\right)i.$$

وبالتالى فإنه يمكن التعبير عن الدالة المكاملة على أنها الدالة

$$f(z) = \frac{2/a}{(z-z_1)(z-z_2)}.$$

لاحظ أن

$$|z_2| = \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{|a|} > 1$$

وذلك حيث أن $-1 < a < 1$. كذلك ، حيث أن $|z_1 z_2| = 1$ ، ينتج أن $|z_1| < 1$. وبالتالى لا توجد نقط شاذة للدالة المكاملة تنتمى للدائرة C ، والنقطة الشاذة الوحيدة التى تنتمى لداخلية الدائرة C هى القطب البسيط z_1 . باق الدالة المكاملة المناظر لهذا القطب هو

$$B_1 = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{2/a}{z_1 - z_2} = \frac{1}{i\sqrt{1-a^2}}.$$

وبالتالى فإن

$$\int_C \frac{2/a}{z^2 + (2i/a)z - 1}\, dz = 2\pi i B_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}};$$

ومنها نحصل على قيمة التكامل (٤) كما هو مطلوب .

٧٥ – التكامل حول نقطة تفرع Integration Around a Branch Point

كتوضيح أخير لاستخدام نظرية الباق فى حساب التكاملات الحقيقية سنعتبر الآن مثالا يتضمن نقط تفرع وفروع قاطعة .

افرض أن x^{-a} ، حيث $x > 0$ ، $0 < a < 1$، ترمز للقيمة الأساسية للدالة الأسية بالنسبة للأس المذكور ، أى أن x^{-a} هو العدد الحقيقى الموجب $\exp(-a \operatorname{Log} x)$. سنقوم الآن بحساب التكامل الحقيقى المعتل

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1}\, dx \qquad , \qquad (0 < a < 1) \qquad (١)$$

وهذا التكامل ذو أهمية خاصة فى دراسة **دالة جاما**[1] **Gamma function** . يتحقق وجود هذا التكامل عندما $0 < a < 1$ وذلك حيث أن الدالة المكاملة تتصرف مثل x^{-a} بالقرب من $x = 0$ ومثل x^{-a-1} عندما تؤول x إلى ∞.

لحساب التكامل (١) نعتبر التكاملين الخطيين

$$\int_{C_1} f_1(z)\, dz, \qquad \int_{C_2} f_2(z)\, dz$$

---

(١) انظر على سبيل المثال ص ٤ من كتاب ليبيديڤ Lebedev المذكور فى ملحق (١)

حيث

$$f_1(z) = \frac{z^{-a}}{z+1} \qquad \left(|z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right),$$

$$f_2(z) = \frac{z^{-a}}{z+1} \qquad \left(|z| > 0, \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2} \right)$$

وحيث C_1, C_2 هما الكفافان المغلقان البسيطان الموضحان فى شكل (٥٢) . فى هذا الشكل $\rho < 1 < R$ الزاوية ϕ مختارة بحيث $\pi/2 < \phi < \pi$.

لاحظ أن الدالة f_1 تحليلية عند جميع نقط الكفاف C_1 وداخليته وبالتالى فإن

$$\int_{C_1} f_1(z)\, dz = 0. \qquad (٢)$$

بالإضافة إلى ذلك فإن الدالة f_2 تحليلية لجميع نقط الكفاف C_2 وداخليته فيما عدا عند القطب البسيط $z = -1$ الذى ينتمى إلى داخلية C_2 . من تعريف الدالة f_2

$$z^{-a} = \exp\left[-a(\text{Log}\,|z| + i \arg z)\right]$$

حيث $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}$ وباق f_2 عند القطب $z = -1$ هو

$$\lim_{z \to -1} (z+1) f_2(z) = \lim_{z \to -1} z^{-a} = \exp(-a\pi i).$$

إذن

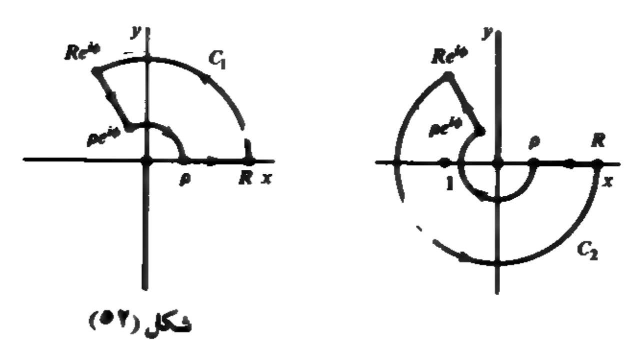
$$\int_{C_2} f_2(z)\, dz = 2\pi i \exp(-a\pi i). \qquad (٣)$$

وحيث أن $f_1(z) = f_2(z)$ على الشعاع $\arg z = \phi$ يكون من الصحيح أن

$$\int_{C_1} f_1(z)\, dz + \int_{C_2} f_2(z)\, dz = \int_\rho^R f_1(x)\, dx - \int_\rho^R f_2(x)\, dx \qquad (٤)$$

$$+ \int_{\Gamma_1} f_1(z)\, dz + \int_{\Gamma_2} f_2(z)\, dz + \int_{\gamma_1} f_1(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f_2(z)\, dz$$

حيث Γ_k القوس الدائرى الأكبر ، γ_k القوس الدائرى الأصغر من الكفاف المغلق البسيط C_k ، حيث $k = 1, 2$ ، الموضح فى شكل (٥٢) .



شكل (٥٢)

وعندما تنتمى z إلى $\Gamma_k \ (k=1,2)$ فإن

$$|f_k(z)| = \left|\frac{z^{-a}}{z+1}\right| \leqq \frac{R^{-a}}{R-1};$$

وحيث إن القوس Γ_k جزء من الدائرة التى محيطها $2\pi R$ فإن

$$\left|\int_{\Gamma_k} f_k(z)\, dz\right| \leqq \frac{R^{-a}}{R-1} 2\pi R.$$

إذن

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_k} f_k(z)\, dz = 0 \qquad (k=1,2). \qquad (٥)$$

وعندما تنتمى z إلى $\gamma_k \ (k=1,2)$ فإن

$$|f_k(z)| = \left|\frac{z^{-a}}{z+1}\right| \leqq \frac{\rho^{-a}}{1-\rho}$$

وبالتالى فإن

$$\left|\int_{\gamma_k} f_k(z)\, dz\right| \leqq \frac{\rho^{-a}}{1-\rho} 2\pi\rho,$$

و

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{\gamma_k} f_k(z)\, dz = 0 \qquad (k=1,2). \qquad (٦)$$

من معادلة (٤) والنتائج السابق الحصول عليها فى المعادلتين(٥) ، (٦) وكذلك المعادلتين (٢) ، (٣) ينتج أن

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \rho\to 0}} \left(\int_\rho^R f_1(x)\, dx - \int_\rho^R f_2(x)\, dx\right) = 2\pi i \exp(-a\pi i).$$

حيث أن

$$\int_\rho^R f_1(x)\, dx - \int_\rho^R f_2(x)\, dx = \int_\rho^R \frac{1}{x+1} [e^{-a \operatorname{Log} x} - e^{-a(\operatorname{Log} x + 2\pi i)}]\, dx$$

$$= \int_\rho^R \frac{x^{-a}}{x+1} (1 - e^{-2a\pi i})\, dx,$$

فإننا نحصل على

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \rho\to 0}} \int_\rho^R \frac{x^{-a}}{x+1}\, dx = \frac{2\pi i \exp(-a\pi i)}{1 - \exp(-2a\pi i)}.$$

أى أن

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1}\, dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0 < a < 1).$$

تمـــاريـــن

استخدم البواق للتحقق من قيم التكاملات المعطاة :

(١) (أ) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\sin\theta} = \frac{2\pi}{3}$ ؛ (ب) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \pi\sqrt{2}$

(٢) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ ، حيث $-1 < a < 1$

(٣) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta\, d\theta}{5-4\cos 2\theta} = \frac{3\pi}{8}$

(٤) $\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta\, d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \frac{\pi a^2}{1-a^2}$ ، حيث $-1 < a < 1$

(٥) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}$ ، حيث $a > 1$

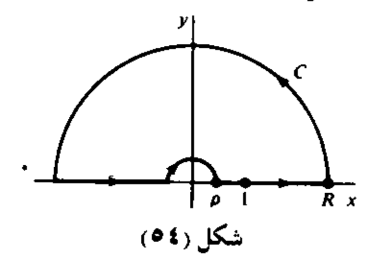
(٦) $\int_0^{\pi} \sin^{2n}\theta\, d\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$ ، حيث $n = 1, 2, \ldots$

٧ استنتج الصيغة التكاملية

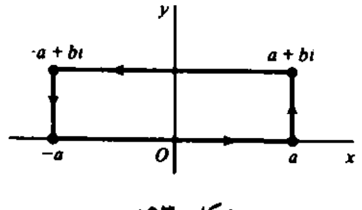
$$\int_0^{\infty} \exp(-x^2)\cos(2bx)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-b^2) \qquad (b > 0)$$

وذلك بمكاملة الدالة $\exp(-z^2)$ حول حد المستطيل الموضح فى شكل (٥٣) ثم إجعل a تؤول إلى ∞ . استخدم حقيقة أن

$$\int_0^{\infty} \exp(-x^2)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$



شكل (٥٤)



شكل (٥٣)

٨ تحقق من صحة الصيغ المعطاة

(أ) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x^2+1}\, dx = 0$ ، (ب) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{(x^2+1)^2}\, dx = -\frac{\pi}{4}$

اقتراح : يمكن استخدام الكفاف المغلق البسيط الموضح بشكل (٥٤) مع نتائج تمارينى (١)، (٤) بند (٧٣).

٩ - دالة بيتا Beta function هى دالة المتغيرين الحقيقيين :

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt \qquad (p > 0, q > 0).$$

باستخدام التعويض $t = 1/(x+1)$ واستخدام النتائج التى حصلنا عليها فى بند (٧٥) اثبت أن

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad (0 < p < 1).$$

١٠ - بمعاونة الكفافات الموضحة فى شكل (٥٢) استنبط الصيغ التكاملية التالية :

(أ) $\int_0^\infty \frac{x^{-1/2}}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ، حيث $x^{-1/2} = \exp(-\frac{1}{2}\operatorname{Log} x)$

(ب) $\int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\frac{1-a}{\cos(a\pi/2)}$ ، حيث $-1 < a < 3,\ x^a = \exp(a \operatorname{Log} x)$

١١ استنبط تمهيدية جوردان Jordan's Lemma :

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\, d\theta < \frac{\pi}{2R} \qquad (R > 0).$$

اقتراح : لاحظ أولا أن $\sin\theta \geqq 2\theta/\pi$ عندما $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ وذلك من منحنى دالة الجيب . بعد ذلك اكتب $\exp(-R\sin\theta) \leqq \exp(-2R\theta/\pi)$

١٢ تكاملات فريسنل Fresnel Integrals :

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx = \int_0^\infty \sin(x^2)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

تلعب دورا هاما فى نظرية الحيود (أو الانكسار) Diffraction Theory . باعتبار أن

$$\int_0^\infty \exp(-x^2)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

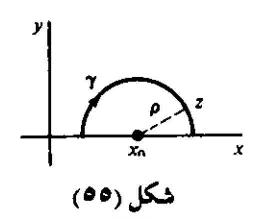
أوجد قيمة تكاملات فريسنل بمكاملة الدالة $\exp(iz^2)$ حول حد القطاع $0 \leqq r \leqq R$ ، $0 \leqq \theta \leqq \pi/4$ ثم اجعل R تؤول إلى ∞ . استخدم تمهيدية جوردان (تمرين (١١)) لإثبات أن قيمة التكامل على طول القوس الدائرى $r = R$ ، $0 \leqq \theta \leqq \pi/4$ تؤول للصفر عندما يؤول R إلى ∞ .

١٣ - نفرض أن النقطة $z = x_0$ على محور السينات قطب بسيط لدالة ما f وأن B_0 باق f عند هذا القطب . نفرض أن γ النصف العلوى من الدائرة $|z - x_0| = \rho$ (شكل ٥٥) موجها ضد عقرب الساعة ، حيث ρ صغيرة صغراً كافيا بدرجة تجعل f تحليلية لجميع نقط داخلية الدائرة ومحيطها فيما عدا عند القطب x_0 . لاحظ أن

$$f(z) = \frac{B_0}{z - x_0} + g(z) \qquad (0 < |z - x_0| < \rho)$$

حيث g دالة تحليلية ، وبالتالى متصلة ، لجميع نقط الجوار $|z - x_0|$ ، اثبت أن

$$\lim_{\rho \to 0} \int_\gamma f(z)\, dz = -B_0\pi i.$$



شكل (٥٥)

١٤ - الصيغة التكاملية

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

تلعب دورا هاما في نظرية متسلسلات فورييه[١] Fourier Series . استنبط هذه الصيغة بمكاملة e^{iz}/z حول الكفاف المغلق البسيط C الموضح بشكل (٥٤) ثم اجعل R يؤول إلى ∞ و ρ يؤول إلى الصفر . استخدم تمهيدية جوردان (تمرين (١١)) لإثبات أن قيمة التكامل على طول نصف الدائرة $z = Re^{i\theta}$ ، $0 \leqq \theta \leqq \pi$ تقترب من الصفر عندما يؤول R إلى ∞ . كذلك استخدم تمرين (١٣) لإثبات أن قيمة التكامل على امتداد نصف الدائرة الصغرى الموضحة بشكل (٥٤) تقترب من $-\pi i$ عندما يؤول ρ إلى الصفر .

١٥ - استنبط صيغة التكامل

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

اقتراح : لاحظ أن $2\sin^2 x = \mathrm{Re}\,(1 - e^{i2x})$ وكامل الدالة $(1 - e^{i2z})/z^2$ حول الكفاف الموضح بشكل (٥٤)

١٦ - تكامل الدالة

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2 - 4x + 5)}$$

على فترة تحتوى نقطة الأصل لا يتحقق وجوده . اثبت أن القيمة الأساسية لتكامل هذه الدالة على طول محور السينات بأكمله ، أى

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{\rho \to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\rho} f(x)\, dx + \int_{\rho}^{\infty} f(x)\, dx\right]$$

حيث $\rho > 0$. لها وجود. اوجد هذه القيمة باستخدام الكفاف الموضح بشكل (٥٤) والنتيجة السابق الحصول عليها فى تمرين (١٣) .

الإجابة : $2\pi/5$

---

(١) انظر كتاب ر ڤ.تشرشل R.V. Churchill المعنون

"Fourier Series and Boundary Value Problems"

الطبعة الثانية ص ٨٥ ، ٨٦ ، ١٩٦٣ .

الفصل الثامن

الراسم الحافظ للزاوية الموجهة

Conformal Mapping

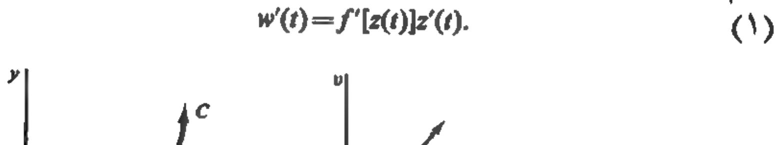
فى هذا الباب سنقدم مفهوم الراسم الحافظ للزاوية الموجهة ثم نستنبط بعض النتائج المتعلقة بسلوك الدوال التى تكون توافقية فى داخلية منطقة ما وقابلة للاشتقاق على حد هذه المنطقة تحت تغيير للمتغيرات يتعين بمثل هذه الرواسم . وفى الباب التالى سنعطى بعض التطبيقات لهذه النتائج .

٧٦ – خواص أساسية Basic Properties

دعنا نفحص التغيرات الناتجة فى اتجاهات المنحنيات المارة بنقطة z_0 تحت تأثير التحويلة $w = f(z)$ عندما تكون الدالة f تحليلية عند z_0 و $f'(z_0) \neq 0$.

نفرض أن C قوس أملس مار بالنقطة z_0 . إذا كان $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leqq t \leqq b$ ، تمثيلا بارامتريا للقوس C فإن : $w(t) = f[z(t)]$, $a \leqq t \leqq b$ ، يكون تمثيلا بارامتريا للقوس Γ صورة C بالتحويلة $w = f(z)$. تبعا لقاعدة السلسلة المعطاة فى تمرين (٧) بند (٤٣) نعلم أن

$$w'(t) = f'[z(t)]z'(t). \tag{١}$$



$\phi_0 = \psi_0 + \theta_0.$

شكل (٥٦)

إذن ، عندما يقع القوس C فى نطاق يحوى النقطة z_0 وتكون فيه الدالة f تحليلية و $f'(z) \neq 0$ فإن الصورة Γ للقوس C تكون أيضاً قوسا أملسا . وعلاوة على ذلك ، فإننا نحصل من المعادلة (١) على العلاقة

$$\arg w'(t) = \arg f'[z(t)] + \arg z'(t). \tag{٢}$$

زاوية ميل خط موجه مماس للقوس C عند النقطة $z_0 = z(t_0)$ ، $a < t_0 < b$ ، هى أى قيمة θ_0 من قيم $\arg z'(t_0)$ (بند (٤٣)) . إذا كانت ψ_0 أحدى قيم $\arg f'(z_0)$ فإن المقدار

$$\phi_0 = \psi_0 + \theta_0$$

يكون قيمة من قيم $\arg w'(t_0)$ وذلك تبعا للمعادلة (٢) وبالتالى تكون هذه القيمة هى زاوية ميل الخط الموجه المماس للقوس Γ عند النقطة $w_0 = f(z_0)$ (شكل (٥٦)). إذن ، عندما تكون دالة f تحليلية عند نقطة ما z_0 و $f'(z_0) \neq 0$ فإن الخط الموجه المماس لقوس أملس C عند z_0 يدور بزاوية مقدارها

$$\psi_0 = \arg f'(z_0) \qquad (٣)$$

تحت تأثير التحويلة $w = f(z)$.

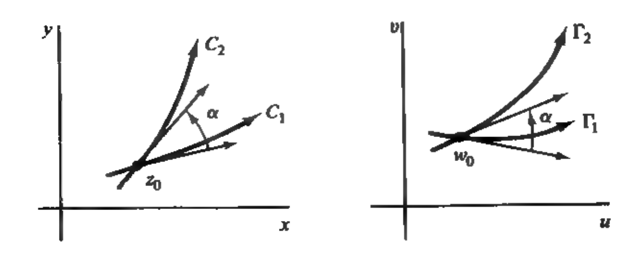
افرض أن C_1, C_2 قوسان أملسان ماران بالنقطة z_0 وأن θ_2 و θ_1 هما زاويتا ميلى المستقيمين الموجهين المماسين للقوسين C_1, C_2 على الترتيب عند z_0 . مما ذكر أعلاه ينتج أن

$$\phi_1 = \psi_0 + \theta_1 \qquad \phi_2 = \psi_0 + \theta_2$$

هما زاويتا ميلى المستقيمين الموجهين المماسين للصور Γ_2 , Γ_1 للقوسين C_2 و C_1 على الترتيب عند النقطة $w_0 = f(z_0)$ إذن ، $\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1$ ، أى أن الزاوية $\phi_2 - \phi_1$ من Γ_1 إلى Γ_2 لها نفس مقدار واتجاه الزاوية $\theta_2 - \theta_1$ من C_1 إلى C_2. هاتان الزاويتان يرمز لهما بالرمز α فى شكل (٥٧) .

يقال لراسم يحفظ مقدار واتجاه الزاوية بين أى قوسين أملسين مارين بنقطة معينة أنه **راسم حافظ للزاوية الموجهة** **Conformal mapping** عند هذه النقطة . ما سبق استنباطه يمكن صياغته فى النظرية التالية .

نظرية : عند كل نقطة z تكون عندها f تحليلية وبحيث $f'(z) \neq 0$ يكون الراسم $w = f(z)$ حافظا للزوايا الموجهة .



شكل (٥٧)

فيما يلي عندما نقول **راسم حافظ للزوايا الموجهة** أو **تحويلة حافظة للزوايا الموجهة** فإننا سنعنى الرسم بدالة تحليلية معرفة على نطاق لا تنعدم مشتقة الدالة عند أى من نقطه .

يقال للراسم الذى يحفظ مقدار الزاوية وليس بالضرورة اتجاهها أنه **راسم حافظ للزوايا** **Isogonal** . التحويلة $w=\bar{z}$ انعكاس بالنسبة للمحور الحقيقى وهى تحويلة حافظة للزوايا ولكنها ليست حافظة للزوايا الموجهة . وإذا أتبعت هذه التحويلة بتحويلة حافظة للزوايا الموجهة فإن التحويلة الناتجة $w=f(\bar{z})$ تكون أيضاً حافظة للزوايا ولكن ليست حافظة للزوايا الموجهة .

افرض أن **f** ليست دالة ثابتة وتحليلية عند نقطة ما z_0 . إذا كانت $f'(z_0)=0$ فإن z_0 يقال لها **نقطة حرجة Critical Point** للدالة **f** . فمثلا النقطة $z=o$ نقطة حرجة للتحويلة

$$w=z^2.$$

هذه التحويلة ترسم الشعاع $\theta=c$ الذى رأسه النقطة $z=o$ فوق الشعاع $\phi=2c$ الذى رأسه النقطة $w=o$. من هذا نرى أن مقدار الزاوية بين أى شعاعين رأساهما النقطة الحرجة $z=o$ يتضاعف تحت تأثير هذه التحويلة .

وبصفة عامة ، يمكن تبيان أنه إذا كانت z_0 نقطة حرجة للتحويلة $w=f(z)$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث يكون مقدار صورة الزاوية بين قوسين أملسين مارين بالنقطة z_0 بالتحويلة $w=f(z)$ يساوى **m** من المرات مقدار الزاوية بين القوسين . العددالصحيح**m** أصغر عدد صحيح موجب بحيث $f^{(m)}(z_0)\neq 0$. وسنترك تفاصيل إثبات ذلك كتمارين للقارىء .

٧٧ – خواص إضافية وأمثلة Further properties and Examples

إذا كانت صورتا منحنيين براسم حافظ للزوايا الموجهة متعامدتين فإن هذين المنحنيين لابد وأن يكونا متعامدين . وعلى سبيل الخصوص ، إذا كانت التحويلة

$$u+iv=f(x+iy)$$

حافظة للزوايا الموجهة عند نقطة (x_0,y_0) وإذا كانت $u_0+iv_0=f(x_0+iy_0)$ فإن المنحنيات المستوية $u(x,y)=u_0$ ، $v(x,y)=v_0$ ترسم إلى الخطوط المستقيمة المتعامدة $u=u_0$ $v=v_0$ على الترتيب . وبالتالى لابد وأن تكون هذه المنحنيات المستوية متعامدة (قارن تمرين (١٣) بند (٢٠)) .

خاصية أخرى لتحويلة $w=f(z)$ حافظة للزوايا الموجهة عند نقطة z_0 يمكن الحصول

عليها عند أخذ مقياس $f'(z_0)$ فى الاعتبار . من تعريف المشتقات وخاصية (٨) بند (١٢) للنهايات نعلم أن

$$|f'(z_0)| = \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}.$$

من هذا يتضح أن الطول $|z-z_0|$ للقطعة المستقيمة الصغيرة التى إحدى نقطتى نهايتها z_0 يزيد أو ينقص تقريبا بالمعامل $|f'(z_0)|$ تحت تأثير التحويلة $w=f(z)$ وذلك لأن $|f(z)-f(z_0)|$ هو طول القطعة المستقيمة المناظرة فى المستوى المركب w . بالإضافة إلى ذلك فإن صورة منطقة صغيرة فى جوار ما للنقطة z_0 يكون لها تقريبا نفس شكل المنطقة الأصلية . كل **من زاوية الدوران** ψ_0 المعطاة بالمعادلة (٣) بند (٧٦) والمعامل القياسى $|f'(z_0)|$ لتحويلة حافظة للزوايا الموجهة يتغير عموما من نقطة لأخرى وبالتالى فإن منطقة كبيرة قد ترسم إلى منطقة لا تحمل أى نوع من التشابه مع المنطقة الأصلية .

التحويلة $w=f(z)$ الحافظة للزوايا الموجهة عند نقطة z_0 لها **معكوس محلى Local inverce** هناك . أى أنه إذا كانت $w_0=f(z_0)$ فإنه يوجد نطاقين مستطيلين R,S مراكزهما عند z_0,w_0 على الترتيب بحيث تناظر كل نقطة $w \varepsilon R$ نقطة وحيدة $z\varepsilon R$ تحقق $w=f(z)$. التحويلة العكسية ، التى يرمز لها بالرمز $z=g(w)$ ، تحليلية عند w_0 ومشتقتها هناك تعطى بالصيغة

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} \qquad (١)$$

تحقق وجود مثل هذه الدالة العكسية ينتج مباشرة من نتيجة فى حساب التفاضل والتكامل للمتغيرات الحقيقية[١]. وسنذكر هنا هذه النتيجة ونترك تفصيلات تطبيقاتها للتمارين . إفرض أن الدالتين

$$u=u(x,y), \qquad v=v(x,y) \qquad (٢)$$

متصلتين فى جوار ما لنقطة (x_0,y_0) فى المستوى $x\,y$ وأن لهما مشتقات جزئية أولى متصلة عند جميع نقط هذا الجوار . هاتين الدالتين تمثلان تحويلة إلى المستوى $u\,v$ ونفرض بالإضافة إلى ذلك أن جاكوبى التحويلة :

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{vmatrix} = u_x(x,y)v_y(x,y) - v_x(x,y)u_y(x,y)$$

لاينعدم عند (x_0,y_0) . وبالتالى إذا كان $u_0=u(x_0,y_0)$ و $v_0=v(x_0,y_0)$ فإنه يوجد نطاقان مستطيلان R,S مركزيهما (u_0,v_0) , (x_0,y_0) على الترتيب بحيث تناظر كل نقطة $(u,v)\,\varepsilon\, S$ نقطة وحيدة $(x,y)\,\varepsilon\, R$ بحيث $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$. وهذا يمكننا من تعريف الدوال العكسية

(١) انظر على سبيل المثال كتاب Advanced Calculus تأليف A.E. Taylor, W.R. Mann الطبعة الثانية ص ٢٥١ - ٢٥٢ ، ١٩٧٢ .

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v) \tag{٣}$$

على S. هذه الدوال متصلة ولها مشتقات جزئية أولى متصلة تحقق الشروط

$$\begin{aligned} x_u(u,v) &= \frac{1}{J(x,y)} v_y(x,y), \qquad x_v(u,v) = -\frac{1}{J(x,y)} u_y(x,y), \\ y_u(u,v) &= -\frac{1}{J(x,y)} v_x(x,y), \qquad y_v(u,v) = \frac{1}{J(x,y)} u_x(x,y), \end{aligned} \tag{٤}$$

حيث النقط $(u,v),(x,y)$ مرتبطة بالمعادلات (٢) ، (٣) .

لاحظ أنه بالرغم من أن التحويلة الحافظة للزوايا الموجهة أحادية فى جوار ما لكل نقطة من نقاط نطاق تعريفها إلا أنها لا تكون بالضرورة أحادية فى نطاق التعريف بأكمله . كمثال على ذلك الدالة $w = z^2$ الحافظة للزوايا الموجهة فى النطاق $1 < |z| < 2$ والتى لا تكون أحادية فى هذا النطاق .

لاحظ ان كل من الدوال البسيطة التى درسناها فى الباب الرابع تحليلية فى نطاق ما . وبالتالى فإن التحويلات المعرفة بهذه الدوال تكون حافظة للزوايا الموجهة عند كل نقطة تكون عندها الدالة تحليلية وليست نقطة حرجة (بند (٧٦)) . وكمثال توضيحى ، التحويلة

$$w = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

حافظة للزوايا عند النقطة $z = 1+i$ حيث يتقاطع المستقيمان $y=x, x=1$. الخط المستقيم $y=x$ يرسم إلى الشعاع $u=0, v \geqq 0$ ويرسم الخط المستقيم $x=1$ إلى المنحنى الذى يمثل بارامتريا بالمعادلات

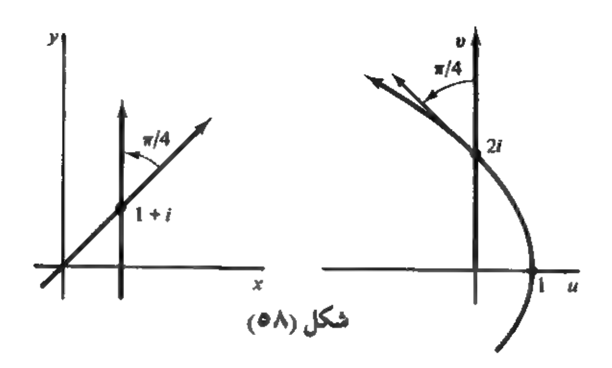
$$u = 1 - y^2, \qquad v = 2y$$

هذا المنحنى الأخير هو القطع المكافىء $v^2 = -4(u-1)$ (شكل (٥٨)) .

إذا اعتبر اتجاه تزايد y على أنه الاتجاه الموجب لكلا المستقيمين فى المستوى المركب z فإن مقياس الزاوية الموجهة من الخط المستقيم $y=x$ إلى الخط المستقيم $x=1$ يساوى $\pi/4$. عندما $y > 0$ فإن تزايد y على امتداد الخط المستقيم $y=x$ يستتبعه تزايد v على امتداد الخط المستقيم $u=0$ ، وذلك لأن $v = 2y^2$ وبالتالى يكون الاتجاه الموجب لصورة المستقيم $y=x$ إلى أعلى عندما $y > 0$. وهذا صحيح أيضاً بالنسبة للقطع المكافىء ، كما يتضح من المعادلة البارامترية الثانية $v = 2y$. من هذا يمكننا استنباط أن مقياس الزاوية الموجهة من صورة المستقيم $y=x$ إلى صورة المستقيم $x=1$ عند النقطة $w = 2i$ (هذه النقطة هى صورة النقطة $z=1+i$) يساوى $\pi/4$ كما هو مطلوب .

لاحظ أن زاوية دوران التحويلة $w = z^2$ عند النقطة $z = 1+i$ هى إحدى قيم

$\arg [2(1+i)]$، أو $\pi/4$. المعامل القياسى عند هذه النقطة يساوى $2\sqrt{2}$.



شكل (٥٨)

تمـــاريـــن

١ - عين زاوية الدوران عند النقطة $z=2+i$ بالتحويلة $w=z^2$. وضح بيانيا زاوية الدوران لمنحنى خاص . اثبت أن المعامل القياسى لهذه التحويلة عند النقطة المعطاة يساوى $2\sqrt{5}$.

٢ - عين زاوية الدوران بالتحويلة $w=1/z$

(أ) عند النقطة $z=1$ (ب) عند النقطة $z=i$

الأجوبة : (أ) π (ب) صفر

٣ - اثبت أن صور المستقيمين $y=x-1$ و $y=0$ بالتحويلة $w=1/z$ هى الدائرة $u^2+v^2-u-v=0$ والخط المستقيم $v=0$ على الترتيب.ارسم هذه المنحنيات وعين الاتجاهات المتناظرة عليها وتحقق من أن هذه التحويلة تكون حافظة للزوايا الموجهة عند النقطة $z=1$،

٤ - إثبت أن زاوية الدوران عند النقطة الغير صفرية $z_0=r_0\exp(i\theta_0)$ بالتحويلة $w=z^n$، حيث n عدد صحيح موجب ، تساوى $(n-1)\theta_0$. عين المعامل القياسى لهذه التحويلة عند النقطة المعطاة .

الإجابة : nr_0^{n-1}

٥ - اثبت أن التحويلة $w=\exp z$ حافظة للزوايا الموجهة عند جميع النقط فى المستوى المركب . لاحظ أن صور القطع المستقيمة الموجهة المبينة بشكلى (٧) ، (٨) ملحق (٢) تحقق هذا .

٦ - اثبت أن التحويلة $w=\sin z$ حافظة للزوايا الموجهة عند جميع النقط عدا $z=(2n-1)\pi/2$ ، حيث $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$. لاحظ أن صور القطع المستقيمة الموجهة المبينة بالأشكال (٩) ، (١٠) ، (١١) ملحق (٢) تحقق هذا .

٧ افرض أن $w=f(z)$ تحويلة حافظة للزوايا الموجهة عند z_0 . اكتب $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ واستخدم نتائج حساب التفاضل والتكامل للمتغيرات

الحقيقية المذكورة فى بند (٧٧) لإثبات أن الدالة f يكون لها معكوس محلى g عند z_0 وتحليلى عند $f(z_0)$.

إقتراح : عبر أولا عن التحويلة $w=f(z)$ بدلالة معادلتى (٢) بند (٧٧) لتبيان أن الجاكوبى لاينعدم عند (x_0,y_0) ، إستخدم معادلتى كوشى – ريمان لإثبات أن قيمته عند النقطة z_0 تساوى $|f'(z_0)|^2$. بعد ذلك عرف g بدلالة معادلتى (٣) بند (٧٧) واستخدم الشروط (٤) لإثبات أن المشتقات الجزئية الأولى لهاتين الدالتين تحقق معادلتى كوشى – ريمان عند النقطة (u_0,v_0) .

٨ – إثبت أنه إذا كانت $z=g(w)$ المعكوسة المحلية للتحويلة $w=f(z)$ الحافظة للزوايا الموجهة عند النقطة z_0 ، فإن

$$g'(w_0)=\frac{1}{f'(z_0)}$$

حيث $w_0=f(z_0)$. لاحظ أن وجود $g'(w_0)$ يتحقق من تمرين (٧) وأن الصيغة المعطاة أعلاه تبين ان g تكون فى الواقع حافظة للزوايا الموجهة عند w_0 .

إقتراح : اكتب $g[f(z)]=z$ ثم طبق قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقات الدوال المحصلة .

٩ – أوجد المعكوسة المحلية للتحويلة $w=\exp z$ عند النقطة (أ) $z_0=0$ ، (ب) $z_0=2\pi i$ ثم حقق صيغة (١) بند (٧٧) لتفاضل المعكوسة المحلية التى حصلنا عليها فى تمرين (٨) .

الاجوبة : (أ) $\operatorname{Log} w$ (ب) $\operatorname{Log} w+2\pi i$.

١٠ – افرض أن z_0 نقطة حرجة للدالة f وأن m أصغر عدد صحيح موجب بحيث $f^{(m)}(z_0)\neq 0$. افرض أن Γ هى صورة القوس الأملس C بالتحويلة $w=f(z)$ كما هو موضح بشكل (٥٦) . إثبت أن زاويتى الميل تحققان الآن العلاقة

$$\phi_0=m\theta_0+\arg[f^{(m)}(z_0)].$$

ومن ثم إثبت أنه إذا كانت α ترمز للزاوية بين القوسين الأملسين C_1,C_2 كما هو موضح بشكل (٥٧) فإن الزاوية المناظرة بين الصورتين ، هى $\beta=m\alpha$.

إقتراح : من مفكوك تايلور للدالة f عند z_0 نحصل على العلاقة

$$\arg[f(z)-f(z_0)]=m\arg(z-z_0)+\arg\left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)+\cdots\right].$$

ثم نستخدم حقيقة أن زاوية ميل القوس C عند z_0 وزاوية ميل صورته Γ عند $f(z_0)$ هما نهايتى $\arg[f(z)-f(z_0)],\ \arg(z-z_0)$ على الترتيب عندما تقترب z من z_0 على امتداد القوس C .

٧٨ – المرافقات التوافقية Harmonic Conjugates

لاحظنا فى بند (٢٠) أنه إذا كانت

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

دالة تحليلية فى نطاق ما D ، فإن الدالة الحقيقية $v(x,y)$ تكون المرافق التوافقى للدالة الحقيقية $u(x,y)$. أى أن ، الدالتين $v(x,y)$ و $u(x,y)$ توافقيتان فى D وتحقق مشتقاتهما الجزئية الأولى معادلتى كوشى – ريمان

$$u_x(x,y) = v_y(x,y), \qquad u_y(x,y) = -v_x(x,y) \tag{١}$$

عند جميع نقط D.

سنبين الآن أنه إذا كانت $u(x,y)$ دالة توافقية معطاة معرفة على نطاق بسيط الترابط D ، فإنه يوجد دائما مرافق توافقى لها . لإثبات ذلك ، سنعتبر أولا التكامل الخطى

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_t(r,t)\,dr + u_r(r,t)\,dt \tag{٢}$$

حيث مسار التكامل أى كفاف يقع فى D ويصل النقطة الثابتة (x_0,y_0) بنقطة متغيرة (x,y) . سنستخدم r,t كمتغيرات التكامل وذلك للتمييز بينهما وبين المتغيرات التى تظهر فى الحد الأعلى للتكامل . الصيغة المقترحة للتكامل (٢) تولدت من حقيقة أنه إذا كانت v مرافقة توافقية للدالة u فإن

$$dv = v_x\,dx + v_y\,dy = -u_y\,dx + u_x\,dy.$$

وحيث أن u توافقية على D فإنها تحقق معادلة لابلاس :

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0,$$

التى ينتج منها أن المشتقة الجزئية للدالة $-u_y(x,y)$ بالنسبة للمتغير y تساوى المشتقة الجزئية للدالة $u_x(x,y)$ بالنسبة للمتغير x . أى أن الدالة المكاملة فى التكامل (٢) تفاضل تام[١]. من هذا يتضح أن التكامل (٢) لا يعتمد على المسار المختار وبالتالى يعرف دالة حقيقية

$$v(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_t(r,t)\,dr + u_r(r,t)\,dt \tag{٣}$$

فى المتغيرين x,y (الحد الأعلى للتكامل) .

بقى الآن أن نثبت أن $v(x,y)$ مرافق توافقى للدالة $u(x,y)$. . من صيغ التفاضل للتكاملات الخطية ذات حد أعلى متغير للتكامل ، بحساب التفاضل والتكامل للمتغيرات الحقيقية ، نحصل على

$$v_x(x,y) = -u_y(x,y), \qquad v_y(x,y) = u_x(x,y) \tag{٤}$$

المعادلتان (٤) هما معادلتا كوشى – ريمان (١) . وحيث أن المشتقات الجزئية الأولى

---

(١) لمزيد من التفاصيل عن التفاضلات التامة التى استخدمت هنا انظر على سبيل المثال كتاب Advanced Calculus تأليف A.E. Toylor,W.R. Mann ، الطبعة الثانية ص ٤٩٥ - ٥٠٤ ، ١٩٧٢

للدالة $u(x,y)$ متصلة فيتضح من (٤) أن المشتقات الجزئية الأولى للدالة $v(x,y)$ متصلة أيضاً . وبالتالى فإن $u(x,y) + iv(x,y)$ تكون دالة تحليلية فى النطاق D (بند (١٧)) وهذا بدوره يثبت أن v مرافق توافقى للدالة u .

الدالة v المعرفة بالصيغة (٣) ليست بالطبع هى المرافق التوافقى الوحيد للدالة u . وذلك لأن الدالة $v(x,y) + c$ ، حيث c ثابت اختيارى حقيقى ، مرافق توافقى أيضاً للدالة u .

لتوضيح ماذكر اعلاه ، اعتبر الدالة $u(x,y) = xy$ التوافقية على المستوى xy بأكمله . من المعادلة (٣) ، الدالة

$$v(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} -r\,dr + t\,dt$$

مرافق توافقى للدالة u(x,y) . يمكن إيجاد قيمة هذا التكامل بالتجربة ، كما يمكن كذلك إيجاد قيمته بمكاملته أولا على امتداد المسار الأفقى من نقطة الأصل إلى النقطة (x,o) ثم مكاملته بعد ذلك على امتداد المسار الرأسى من (x,o) إلى النقطة (x,y) . وعموما فإن ناتج هذا التكامل هو

$$v(x,y) = -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2,$$

والدالة التحليلية المناظرة هى

$$f(z) = xy - \frac{i}{2}(x^2 - y^2) = -\frac{i}{2}z^2.$$

٧٩ – تحويلات الدوال التوافقية Transformations of Harmonic Functions

تعتبر مسألة إيجاد دالة توافقية فى نطاق معين وتحقق خواصا محددة على حد هذا النطاق من المسائل الأساسية فى الرياضيات التطبيقية . إذا كانت قيم الدالة محددة على حد النطاق فإن المسألة تعرف بمسألة شروط حدية من النوع الأول أو مسألة **دريشلت** **Dirichlet problem**. وإذا كانت قيم مشتقة الدالة فى الاتجاه العمودى محددة على حد النطاق فإن المسألة تعرف بمسألة شروط حدية من النوع الثانى أو مسألة **نويمان** **Neumann problem** . تعديلات فى هذه الأنواع من الشروط الحدية أو مزيج منها قد تظهر كذلك .

كل دالة تحليلية تمدنا بزوج من الدوال التوافقية . فعلى سبيل المثال ، حيث أن الدالة $-ie^{iz}$ شاملة فإن مركبتيها .

$$H(x,y) = e^{-y}\sin x, \qquad G(x,y) = -e^{-y}\cos x \tag{1}$$

تكونان توافقيتان عند جميع النقط . الدالة H تحقق الشروط :

$$H_{xx}(x,y) + H_{yy}(x,y) = 0, \tag{2}$$

$$H(0,y) = 0, \qquad H(\pi,y) = 0, \tag{3}$$

$$H(x,0) = \sin x, \qquad \lim_{y\to\infty} H(x,y) = 0 \tag{٤}$$

وعليه فهى تشكل مسألة دريشلت للشريحة $0 < x < \pi, y > 0$. بالطبع ، نفس الدالة تحقق شروطا حدية أخرى لنفس النطاق ولنطاقات أخرى . فعلى سبيل المثال ، مشتقتها فى الاتجاه العمودى $H_x(x,y)$

تنعدم على الخط المستقيم $x = \pi/2$.

أحياناً يمكن اكتشاف حل مسألة معطاة وذلك بالتعرف على كونها الجزء الحقيقى أو التخيلى لدالة تحليلية . ولكن نجاح هذا الأسلوب يعتمد على بساطة المسألة كما يتوقف كذلك على إلمامنا بالأجزاء الحقيقية والتخيلية لقدر كبير من الدوال التحليلية . سنعطى الآن إضافة هامة تساعد على حل مثل هذه المسائل .

نظرية : افرض أن الدالة التحليلية

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

ترسم نطاق D_z فى المستوى المركب z فوق نطاق D_w فى المستوى المركب w . إذا كانت $h(u,v)$ دالة توافقية معرفة على D_w ، فإن الدالة

$$H(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)]$$

تكون توافقية فى D_z.

البرهان الذى سنقدمه للنظرية المعطاة سيكون للحالة التى يكون فيها النطاق D_w بسيط الترابط ، وهذه فى الواقع هى الحالة التى تقابلنا غالبا فى التطبيقات . تذكر أن ، وذلك حسب البند السابق ، كل دالة توافقية $h(u,v)$ معطاة يناظرها مرافق توافقى $g(u,v)$. إذن الدالة $\Phi(w) = h(u,v) + ig(u,v)$ تكون توافقية فى النطاق D_w. حيث أن الدالة $f(z)$ تحليلية فى النطاق D_z ، فإن الدالة المركبة $\Phi[f(z)]$ تكون أيضاً تحليلية فى النطاق D_z، وبالتالى فإن الجزء الحقيقى $h[u(x,y),v(x,y)]$ لهذه الدالة المركبة يكون دالة توافقية فى النطاق D_z .

ويجب أن ننوه إلى أن برهان النظرية المعطاة فى الحالة العامة التى لا يكون فيها النطاق D_w بالضرورة بسيط الترابط يمكن كتابته وذلك باستخدام قاعدة السلسلة للمشتقات الجزئية ، وسنترك التفاصيل للقارىء كتمرين .

وكتوضيح للنظرية ، الدالة $h(u,v) = e^{-v} \sin u$ توافقية فى النطاق D_w المكون من جميع نقط نصف المستوى العلوى $v > 0$. تحت تأثير التحويلة

$$w = z^2,$$

نجد أن $u = x^2 - y^2; v = 2xy$ وبالاضافة إلى ذلك نجد أن النطاق D_z فى المستوى المركب z المكون من جميع نقط الربع الأول $x > 0, y > 0$ من المستوى ترسم فوق النطاق

D_w . إذن الدالة

$$H(x,y) = e^{-2xy} \sin (x^2 - y^2)$$

تكون توافقية فى النطاق D_z.

كمثال توضيحى آخر ، دعنا نعتبر الدالة $h(u,v) = v$ التوافقية على الشريحة $-\pi/2 < v < \pi/2,$

ولاحظ أن التحويلة $w = \text{Log}\, z$ ترسم نصف المستوى الأيمن $x > 0$ فوق تلك الشريحة بكتابة

$$\text{Log}\, z = \text{Log}\sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \frac{y}{x},$$

حيث $-\pi/2 < \arctan t < \pi/2$ ، فإننا نجد أن الدالة

$$H(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$$

تكون توافقية فى نصف المستوى $x > 0$.

٨٠ - تحويلات الشروط الحدية Transformations of Boundary Conditions

أن يكون لدالة ما أو لمشتقتها فى الاتجاه العمودى قيما معينة على امتداد حد نطاق معين تكون فيه الدالة توافقية تمثل الشروط الحدية الأكثر شيوعا ، وذلك رغم أنها ليست الأنواع الهامة الوحيدة من الشروط الحدية . سنبين فى هذا البند أن أنواعا معينة من هذه الشروط لا تتغير بالتغير الناشىء للمتغيرات عن تحويلات حافظة للزوايا الموجهة . فى الباب التالى سنقوم باستخدام نتائج هذا البند للحصول على حلول لمسائل الشروط الحدية . الأسلوب الذى سيستخدم فى الباب التالى هو تحويل أى مسألة شروط حدية معطاة فى المستوى xy إلى مسألة أبسط فى المستوى uv ثم استخدام نظريات هذا البند والبند السابق لكتابة حل المسألة الأصلية بدلالة الحل الذى حصلنا عليه فى المسألة المبسطة .

افرض أن

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{1}$$

دالة توافقية ترسم قوس C فى المستوى المركب z فوق قوس Γ فى المستوى المركب w ، وافرض أن $h(u,v)$ دالة ما معرفة على Γ . اكتب

$$H(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)]$$

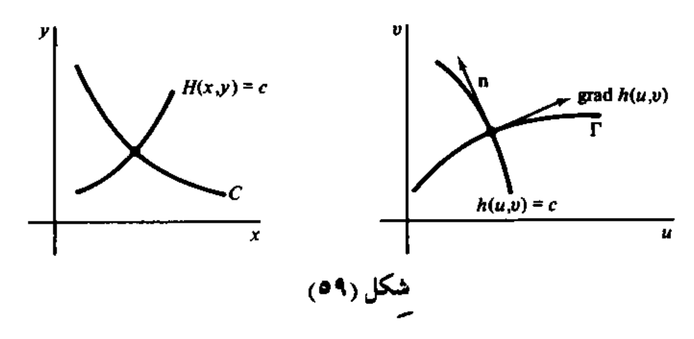
وافرض أن c أى عدد حقيقى . من الواضح أنه إذا كانت $h(u,v) = c$ على Γ ، فإن $H(x,y) = c$ على C.

بالإضافة إلى ذلك افرض أن f(z) تحويلة حافظة للزوايا الموجهة على C وأن $h(u,v)$

قابلة للاشتقاق على Γ . إذا انعدمت المشتقة dh/dn ، للدالة $h(u,v)$ فى الاتجاه العمودى ، على امتداد Γ فإن مشتقة الدالة $H(x,y)$ فى الاتجاه العمودى تنعدم على امتداد C . لإثبات ذلك نذكر القارىء بما درسه فى حساب التفاضل والتكامل للمتغيرات الحقيقية من أن متجه ميل **Gradient** الدالة **h(u,v)** تكون فى اتجاهه المشتقة الاتجاهية لدالة **h** أكبر ما يمكن[1] . ويمكن التعبير عن هذا المتجه بدلالة مشتقتى الدالة **h** بالنسبة للمتغيرين **u,v** على الصورة

$$\text{grad } h(u,v) = h_u(u,v) + ih_v(u,v).$$

قيمة **grad h(u,v)** هى القيمة العظمى للمشتقة الاتجاهية ، ومركبة **grad h(u,v)** فى أى اتجاه هى قيمة المشتقة الاتجاهية للدالة **h** فى هذا الاتجاه . من المعلوم كذلك أن متجه ميل الدالة $h(u,v)$ عند نقطة ما عمودى على المنحنى المستوى $h(u,v) = c$ المار بتلك النقطة .



شكل (٥٩)

اعتبر الآن أى نقطة على Γ . حيث أن dh/dn عند تلك النقطة هى مركبة متجه ميل الدالة $h(u,v)$ عند النقطة المذكورة فى اتجاه عمودى على Γ وحيث أن $dh/dn = 0,$ فإنه ينتج أن متجه الميل لابد وأن يكون مماسا للمنحنى Γ (شكل (٥٩)) . ولكن متجه الميل عمودى على المنحنى المستوى $h(u,v) = c$ المار بتلك النقطة ، وبالتالى لابد وأن يكون I عموديا على هذا المنحنى المستوى . حيث أن $w = f(z)$ تحويلة حافظة للزوايا الموجهة عند نقطة تقاطع C مع $H(x,y) = c$ فلابد وأن يتعامد المنحنيان . وبالتالى فإن مركبة متجه ميل الدالة $H(x,y)$ فى اتجاه عمودى على المنحنى C تنعدم . أى أن مشتقة الدالة $H(x,y)$ فى اتجاه العمود تنعدم عند كل نقطة من نقط C .

فيما ذكرنا أعلاه نلاحظ أننا افترضنا أن $\text{grad } h(u,v) \neq 0$. إذا كان $\text{grad } h(u,v) = 0$

---

(١) لمزيد من المعلومات عن خواص متجهات الميل المستخدمة هنا انظر ، على سبيل المثال ، كتاب **Advanced Calculus** تأليف **A.E. Taylor, W.R. Mann** ، الطبعة الثانية ، ص ٢٩٥ - ٢٩٨ ، ١٩٧٢

فينتج من تمرين ٩ (أ) بهذا البند أن $\text{grad } H(x,y) = 0$ ، وبالتالى فإن dh/dn والمشتقة المناظرة للدالة H فى اتجاه العمود تنعدمان .

سنلخص فيما يلى هذه النتائج ونضعها فى صورة تجعل من الممكن الاستفادة منها فيما يلى فى التطبيقات .

نظرية : افرض أن

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

دالة تحليلية ترسم قوساً C فى المستوى المركب z فوق قوس Γ فى المستوى المركب w . افرض كذلك أن f(z) حافظة للزوايا الموجهة على C وأن $h(u,v)$ دالة قابلة للاشتقاق على Γ إذا حققت الدالة $h(u,v)$ أى من الشرطين

$$h = c \quad \text{أو} \quad \frac{dh}{dn} = 0$$

على طول Γ ، فإن الدالة

$$H(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)]$$

تحقق الشرط المناظر على طول C .

أى شرط حدى مختلف عن النوعين الواردين فى النظرية يمكن تحويله إلى شرط يختلف جوهريا عن الشرط الأصلى . فى أى حالة يمكن الحصول على شروط حدية جديدة للمسألة المحولة وذلك بتحويلات خاصة . ومن المفيد أن نلاحظ أنه تحت تأثير تحويلة حافظة للزوايا الموجهة تكون النسبة بين المشتقة الموجهة للدالة H على امتداد C فى المستوى المركب z والمشتقة الموجهة للدالة h على امتداد الصورة Γ عند النقطة المناظرة فى المستوى المركب w تساوى $|f'(z)|$. عادة هذه النسبة لا تكون ثابتة على امتداد قوس معطى . (انظر تمرينى (٥) ، (٩) من هذا البند) .

تمـــاريــن

١ استخدم صيغة (٣) بند (٧٨) لإيجاد مرافق توافقى للدالة التوافقية $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$. عبر عن الدالة التحليلية الناتجة بدلالة المتغير المركب z .

٢ – افرض أن u(x,y) دالة توافقية فى نطاق بسيط الترابط D . اثبت أن المشتقات الجزئية من جميع الرتب للدالة u تكون متصلة عند جميع نقط D .

٣ – صورة القطعة المستقيمة $x = 0, 0 \leqq y \leqq \pi$ بالتحويلة $w = e^z$ هى نصف الدائرة $u^2 + v^2 = 1, v \geqq 0$. كذلك ، الدالة

$$h(u,v) = 2 - u + \frac{u}{u^2 + v^2}$$

توافقية ، وبالتالى قابلة للاشتقاق ، لجميع نقط المستوى المركب w عدا نقطة الأصل

وقيمتها تساوى اثنين على نصف الدائرة . اكتب $H(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)]$ حسب التغير المشار إليه للمتغيرات واثبت مباشرة أن $H = 2$ على امتداد القطعة المستقيمة . هذا يوضح النظرية المعطاة فى بند (٨٠)

٤ – صورة الجزئين الموجبين من محورى الاحداثيات فى المستوى المركب z مع نقطة الأصل بالتحويلة $w = z^2$ هى محور الاحداثيات u . اعتبر الدالة التوافقية

$$h(u,v) = e^{-u} \cos v$$

ولاحظ أن مشتقتها فى الاتجاه العمودى على امتداد محور الاحداثيات u تنعدم ، أى أن $h_v(u,0) = 0.$ اثبت مباشرة أن مشتقة الدالة H(x,y) فى الاتجاه العمودى ، كما هو معرف فى النظرية ببند ٨٠ ، تنعدم على امتداد الأجزاء الموجبة من المحورين فى المستوى المركب z . لاحظ أن التحويلة $w = z^2$ ليست حافظة للزوايا الموجهة عند نقطة الأصل .

٥ – استخدم الدالة التوافقية

$$h(u,v) = 2v + e^{-u} \cos v$$

بدلا من الدالة $h(u,v)$ المعطاة بتمرين (٤) لإثبات أن $h_v(u,0) = 2$ بينما $H_y(x,0) = 4x$ على امتداد الجزء الموجب من محور x و $H_x(0,y) = 4y$ على امتداد الجزء الموجب من محور y . أى أن الشرط من النوع $dh/dn = c$ لا يحول بالضرورة إلى شرط من النوع $dH/dn = c$

٦ – اثبت أنه إذا كانت دالة ما H(x,y) حلا لمسألة نويمان (بند (٧٩)) ، فإن $H(x,y) + c,$ ، حيث c أى عدد حقيقى ثابت ، تكون أيضاً حلا لتلك المسألة .

٧ – افرض أن الدالة التوافقية $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ترسم نطاقا D_z فى المستوى المركب z فوق نطاق D_w, فى المستوى المركب w . اثبت أنه إذا كانت $h(u,v)$ دالة توافقية معرفة على D_w وكان $H(x,y) = h[u(x,y),v(x,y)]$ فإن

$$H_{xx}(x,y) + H_{yy}(x,y) = [h_{uu}(u,v) + h_{vv}(u,v)]|f'(z)|^2.$$

من هذا استنتج أن الدالة H(x,y) توافقية فى D_z.

٨ – افرض أن p دالة فى المتغيرين u,v وتحقق معادلة بواسون

$$p_{uu}(u,v) + p_{vv}(u,v) = \Phi(u,v)$$

فى نطاق D_w من المستوى المركب w ، حيث Φ دالة معطاة . اثبت أنه إذا كانت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة تحليلية ترسم نطاقا D_z فوق النطاق D_w ، فإن الدالة

$$P(x,y) = p[u(x,y),v(x,y)]$$

تحقق معادلة بواسون

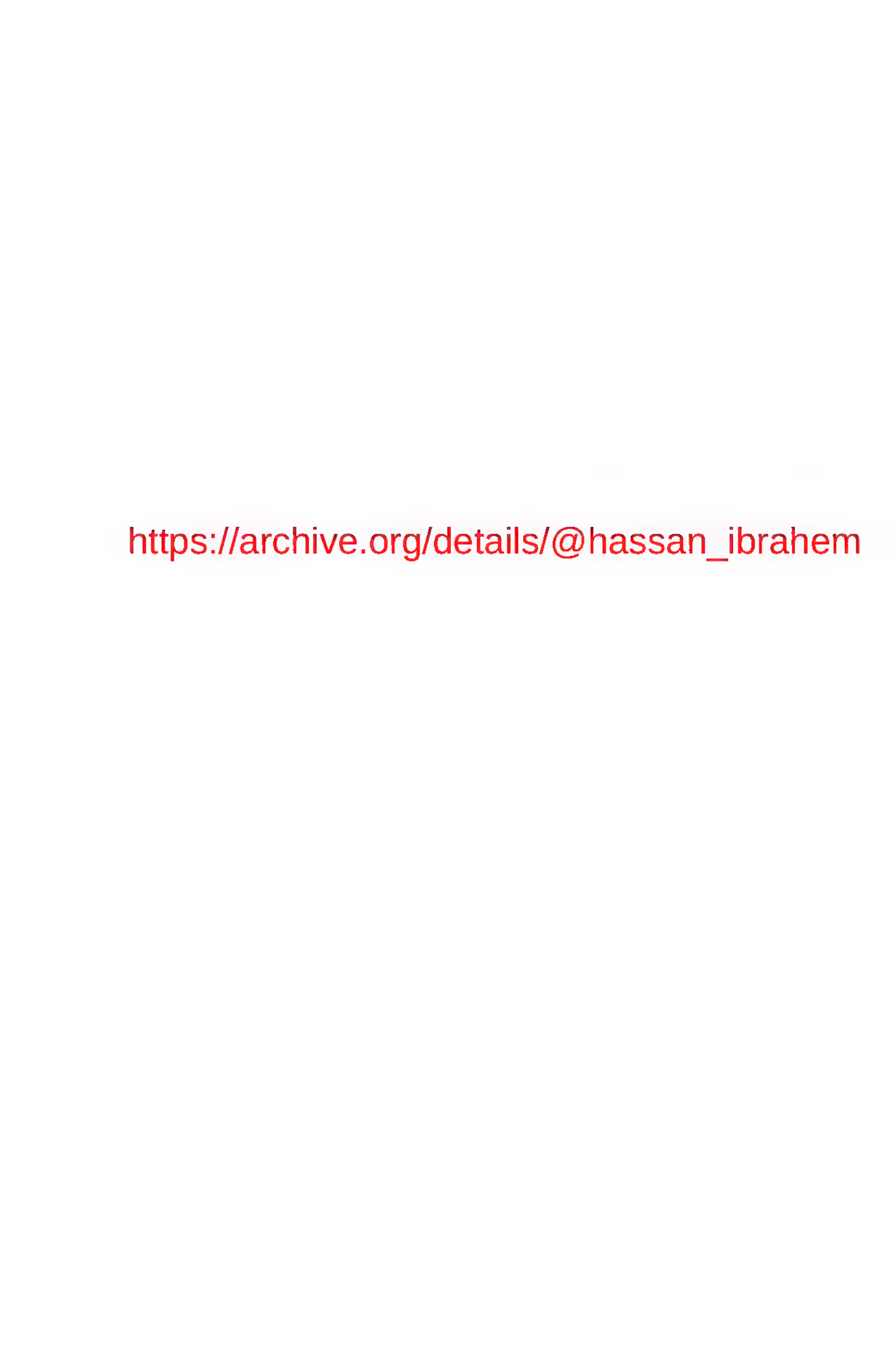
$$P_{xx}(x,y) + P_{yy}(x,y) = \Phi[u(x,y),v(x,y)]|f'(z)|^2.$$

(انظر تمرين (٧)) .

٩ - افرض أن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة تحليلية تعرف راسما حافظا للزوايا الموجهة من نطاق D_z فى المستوى المركب z فوق نطاق D_w فى المستوى المركب w . افرض أن $h(u,v)$ دالة توافقية معرفة على D_w, واكتب $H(x,y) = h[u(x,y),v(x,y)]$. (أ)اثبت أنه تحت تأثير تغيير المتغيرات الموضح يكون $|\text{grad } H(x,y)| = |\text{grad } h(u,v)|\,|f'(z)|$. (ب) لماذا تساوى الزاوية عند نقطة فى D_z بين قوس C والمتجه grad H (x,y) الزاوية عند النقطة المناظرة فى D_w بين الصورة Γ للقوس C والمتجه $\text{grad } h(u,v)$ ؟ (جـ) باستخدام نتائج الجزئين (أ) ، (ب) اثبت أنه إذا كان σ يمثل مسافة على امتداد C وكان τ يمثل مسافة على امتداد Γ فإن المشتقة الموجهة تحقق :

$$\frac{dH}{d\sigma} = \frac{dh}{d\tau}\,|f'(z)|.$$

https://archive.org/details/@hassan_ibrahem



الفصل التاسع

تطبيقات الرواسم الحافظة للزوايا الموجهة

Applications of Conformal Mappings

سنقوم الآن باستخدام الرواسم الحافظة للزوايا الموجهة لحل عدد من المسائل الفيزيائية التى تشتمل على معادلات لابلاس فى متغيرين مستقلين . وبالتحديد فإننا سنعالج مسائل تتعلق بالتوصيل الحرارى **Heat conduction** ، وجهد الكهرباء الساكنة **Electrostatic potential** ، وسريان سائل **Fluid flow** . حيث أن الهدف من هذه المسائل هو توضيح طرق الحل ، فإننا سنتعرض لمسائل بسيطة قدر الإمكان .

٨١ - درجات الحرارة المستقرة Steady Temperatures

فى نظرية التوصيل الحرارى يعرف **الفيض الحرارى Flux of heat** خلال سطح مغلف لجسم مصمت عند نقطة على هذا السطح على أنه كمية الحرارة السارية فى اتجاه العمودى للسطح عند تلك النقطة فى وحدة الزمن لوحدة المساحة . أى أن الفيض الحرارى يكون مقيسا بوحدات مثل سعرات حرارية فى الثانية للسنتيمتر المربع . وسنرمز هنا للفيض بالرمز Φ وهو يتناسب مع مشتقة درجة الحرارة T فى الاتجاه العمودى عند النقطة على السطح :

$$\Phi = -K\frac{dT}{dn} \qquad (K > 0) \qquad (١)$$

الثابت K يسمى **التوصيل الحرارى Thermal conductivity** لمادة الجسم المصمت الذى يفترض أنه متجانس .

سنعين عند كل نقطة من نقط الجسم المصمت إحداثيات كارتيزية لفراغ ثلاثى البعد ، وسنقصر اهتمامنا على تلك الحالات التى تكون فيها درجة الحرارة دالة فى المتغيرين y,x فقط . حيث أن T لا تتغير مع تغير الإحداثيات على امتداد المحور العمودى على

المستوى xy ، فإن الفيض الحرارى يكون فى هذه الحالة ثنائى البعد وموازيا لهذا المستوى . بالإضافة إلى ذلك، سنفترض أن السريان يكون فى حالة استقرار بمعنى أن T لا تتغير مع الزمن .

سنفترض كذلك أنه لا توجد طاقة حرارية متولدة أو مفقودة خلال الجسم المصمت . أى أنه لا يوجد منابع أو مصارف للحرارة هناك . أيضاً ، دالة الحرارة $T(x,y)$ وجميع مشتقاتها الجزئية من الرتبتين الأولى والثانية تكون متصلة عند كل نقطة داخلية للجسم المصمت . هذا التقرير والصيغة (١) للفيض الحرارى هما فرضان من فروض النظرية الرياضية للتوصيل الحرارى . وهذان الفرضان يمكن استخدامهما كذلك عند كل نقطة داخل جسم مصمت يحوى توزيع متصل للمنابع والمصارف .

اعتبر الآن عنصرا داخليا للجسم المصمت . هذا العنصر يكون على شكل متوازى مستطيلات قاعدته مستطيل فى المستوى xy طولا ضلعيه Δx و Δy وطول حرفه فى اتجاه العمودى للمستوى xy يساوى الوحدة (شكل (٦٠)) . المعدل الزمنى لسريان الحرارة فى اتجاه اليمين من خلال الوجه الأيسر يساوى $-KT_x(x,y)\,\Delta y$ ، وفى اتجاه اليمين من خلال الوجه الأيمن يساوى $-KT_x(x+\Delta x,y)\,\Delta y$. بطرح معدل السريان الأول من الثانى نحصل على معدل فقدان الحرارة من العنصر خلال هذين الوجهين . هذا المعدل المحصل يمكن كتابته

$$-K\left[\frac{T_x(x+\Delta x,y)-T_x(x,y)}{\Delta x}\right]\Delta x\,\Delta y,$$

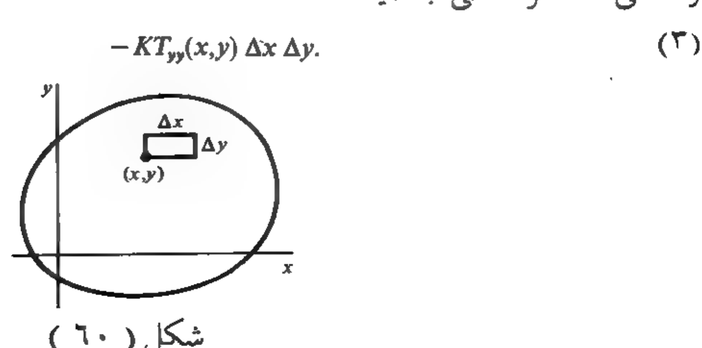
أو

$$-KT_{xx}(x,y)\,\Delta x\,\Delta y \qquad (٢)$$

إذا كانت Δx متناهية فى الصغر . جميع الكميات هنا بالطبع تقريبية وتزداد دقة التقريب كلما زادت Δx و Δy صغرا .

بإتباع نفس الأسلوب نجد أن محصلة معدل فقدان الحرارة خلال الوجهين العلوى والسفلى للعنصر تعطى بالصيغة

$$-KT_{yy}(x,y)\,\Delta x\,\Delta y. \qquad (٣)$$



شكل (٦٠)

الحرارة تسرى إلى داخل أو إلى خارج العنصر من خلال هذه الأوجه الأربعة فقط ، ودرجات الحرارة فى العنصر نفسه تكون مستقرة . إذن مجموع التعبيرين (٢) ، (٣) يساوى صفر ، أى أن

$$T_{xx}(x,y) + T_{yy}(x,y) = 0. \qquad (٤)$$

من هذا نرى أن دالة الحرارة تحقق معادلة لابلاس عند كل نقطة داخلية من نقط الجسم المصمت .

بالنظر إلى معادلة (٤) وحقيقة اتصال دالة الحرارة ومشتقاتها الجزئية ، نستنتج أن T **تكون دالة توافقية فى المتغيرين y,x** فى النطاق الممثل لداخلية الجسم المصمت .

السطوح T(x,y) = c ، حيث c أى ثابت حقيقى ، هى متساويات درجة الحرارة (أو سطوح تساوى الحرارة) **Isotherms** (بمعنى أن لكل ثابت c تكون درجة الحرارة على السطح $T(x,y) = c$ متساوية عندكل نقطة من نقطة)للجسم المصمت بمكن كذلك النظر إلى متساويات درجة الحرارة هذه على أنها منحنيات فى المستوى xy ؛ وذلك حيث أن T(x,y) يمكن النظر إليها على أنها درجة الحرارة لصفيحة رقيقة من المادة فى هذا المستوى حيث أوجه الصفيحة معزولة حراريا . متساويات درجة الحرارة هى نفسها المنحنيات المستوية للدالة T .

متجه ميل الدالة T يكون عموديا على متساوى درجة الحرارة عند كل نقطة من نقطه ، والفيض الحرارى الأعظم عند نقطة ما يكون فى اتجاه متجه الميل عند تلك النقطة . إذا كانت T(x,y) ترمز لدرجات الحرارة فى صفيحة رقيقة وكانت S مرافق توافقى للدالة T ، فإن متجه ميل الدالة T يكون متجه مماس للمنحنى S(x,y) = c عند كل نقطة تكون عندها الدالة T(x,y) + iS(x,y) حافظة للزوايا الموجهة . المنحنيات S(x,y) = c تسمى **خطوط الفيض (أو خطوط السريان) Lines of flow**

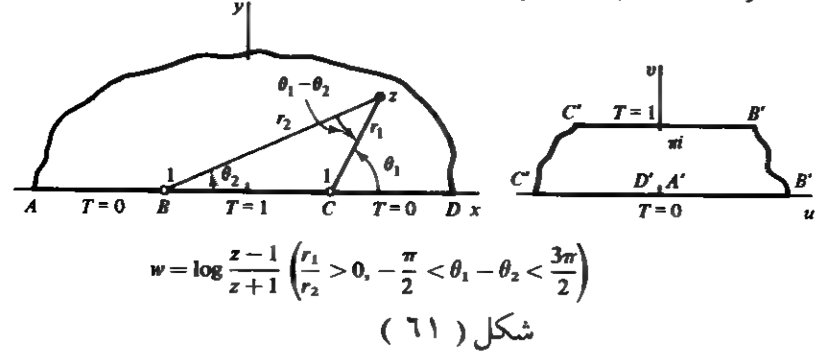
إذا انعدمت مشتقة درجة الحرارة فى الاتجاه العمودى dT/dn على امتداد أى جزء من حدود الصفيحة ، فإن الفيض الحرارى خلال هذا الجزء يساوى صفر . أى أن هذا الجزء يكون معزولاً حراريا وبالتالى يكون خطا من خطوط الفيض .

الدالة T قد ترمز أيضاً لتركيز مادة تنتشر خلال جسم مصمت . فى هذه الحالة تعرف K بثابت الانتشار . جميع ماذكرناه أعلاه واشتقاق معادلة (٤) ينطبق بالمثل لحالة الانتشار المستقر .

٨٢ درجات الحرارة المستقرة فى نصف المستوى

Steady Temperatures in a Half Plane

دعنا نوجد صيغة للدرجات الحرارة المستقرة T(x,y) فى شريحة رقيقة نصف لانهائية $y \geqq 0$ وجهيها معزولين وحافتها y=o تحفظ عند درجة الحرارة صفر فيما عدا الجزء $-1 < x < 1,\ y = 0$ الذى تحفظ درجة حرارته عند درجة الحرارة واحد (شكل (٦١) الدالة T(x,y) تكون محدودة ، وهذا الشرط طبيعى إذا ما اعتبرنا الصفيحة المعطاة على أنها الحالة النهائية للصفيحة $0 \leqq y \leqq y_0$ التى تحفظ حافتها العليا عند درجة حرارة ثابتة عندما تزداد y_0 . وفى الحقيقة فإنه يكون من المقبول فيزيائيا أن نشترط أن تقترب T(x,y) من الصفر عندما تقترب y من مالانهاية .



$$w = \log \frac{z-1}{z+1} \left(\frac{r_1}{r_2} > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \theta_1 - \theta_2 < \frac{3\pi}{2} \right)$$

شكل (٦١)

مسألة الشروط الحدية المطلوب حلها يمكن صياغتها على النحو التالى :

$$T_{xx}(x,y) + T_{yy}(x,y) = 0 \qquad (-\infty < x < \infty,\ y > 0), \tag{١}$$

$$T(x,0) = \begin{cases} 1, & \text{و} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{و} \quad |x| > 1; \end{cases} \tag{٢}$$

أيضاً ، $|T(x,y)| < M$ حيث M ثابت ما موجب .

وهذه هى مسألة دريشلت للنصف العلوى من المستوى xy . أسلوبنا فى الحل هو الحصول على مسألة جديدة من مسائل دريشلت لمنطقة فى المستوى uv . هذه المنطقة ستكون صورة نصف المستوى بتحويلة تحليلية فى النطاق $y > 0$ والتى تكون حافظة للزوايا الموجهة على امتداد الحد y=o فيما عدا عند النقطتين $(\pm 1,0)$ حيث تكون الدالة غير معرفة . وسيكون أمرا بسيطا أن نكتشف دالة توافقية محدودة تحقق المسألة الجديدة . بعد ذلك سنستخدم نظريتى الباب السابق لتحويل حل المسألة فى المستوى uv إلى حل للمسألة الأصلية فى المستوى xy . وبالتحديد ، سيتم تحويل دالة توافقية فى المتغيرين u,v إلى دالة توافقية فى المتغيرين x,y ، كما أن الشروط الحدية فى المستوى uv ستحفظ على أجزاء مناظرة من الحدود فى المستوى xy . ولا يجب أن يكون هناك أى

لبس إذا ما استخدمنا نفس الرمز T ليرمز لدالتى درجة الحرارة المختلفتين فى المستويين .

دعنا نكتب $z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1)$ و $z + 1 = r_2 \exp(i\theta_2)$ ، حيث $-\pi/2 < \theta_k < 3\pi/2$ و $k = 1, 2$ التحويلة

$$w = \log\frac{z-1}{z+1} = \operatorname{Log}\frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2) \tag{٣}$$

$$\left(\frac{r_1}{r_2} > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta_1 - \theta_2 < \frac{3\pi}{2}\right)$$

معرفة على النصف العلوى $y \geqq 0$ من المستوى ، فيما عدا عند النقطتين $z = \pm 1$ ، وذلك حيث أن $0 \leqq \theta_1 - \theta_2 \leqq \pi$ فى هذه المنطقة (شكل (٦١)). الآن قيمة اللوغاريتم فى (٣) تكون القيمة الأساسية عندما $0 \leqq \theta_1 - \theta_2 \leqq \pi$ ، ونلاحظ من شكل (١٩) بملحق (٢) أن النصف العلوى $y > 0$ من المستوى يرسم فوق الشريحة $0 < v < \pi$ فى المستوى المركب w . وبكل تأكيد ، فإن هذا الشكل هو الذى أوحى إلينا اختيار التحويلة (٣) هنا القطعة المستقيمة من محور السينات التى نقطتا نهايتيها z = 1, z = -1 حيث $\theta_1 - \theta_2 = \pi$ ترسم فوق الحافة العليا من الشريحة ، أما بقية محور السينات ، حيث $\theta_1 - \theta_2 = 0$ ، فيرسم فوق الحافة السفلى . من الواضح أن الشروط المطلوبة بأن تكون التحويلة تحليلية وحافظة للزوايا الموجهة تكون متحققة بالنسبة للتحويلة (٣) .

من الواضح أن دالة المتغيرين u,v التوافقية والمحدودة والتى تساوى صفر عند جميع نقط الحافة v = o من الشريحة وتساوى الوحدة عند جميع نقط الحافة $v = \pi$ هى :

$$T = \frac{1}{\pi} v; \tag{٤}$$

هذه الدالة توافقية وذلك حيث أنها الجزء التخيلى من الدالة الشاملة w/π . بالتحويل إلى الاحداثيات y,x باستخدام المعادلة

$$w = \log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + i \arg\frac{z-1}{z+1}, \tag{٥}$$

فإننا نجد أن

$$v = \arg\left(\frac{x-1+iy}{x+1+iy}\right) = \arg\left[\frac{x^2+y^2-1+i2y}{(x+1)^2+y^2}\right],$$

أو

$$v = \arctan\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right).$$

ومدى معكوس دالة الظل هنا من صفر إلى π وذلك حيث أن

$$\arg\frac{z-1}{z+1} = \theta_1 - \theta_2$$

و $0 \leqq \theta_1 - \theta_2 \leqq \pi$.الصيغة (٤) تأخذ الآن الصورة

$$T = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right) \qquad (0 \leqq \arctan t \leqq \pi). \tag{٦}$$

حيث أن الدالة (٤) توافقية فى الشريحة $0 < v < \pi$ وحيث أن التحويلة (٣) تحليلية فى نصف المستوى $y > 0$ ، فإنه يمكننا تطبيق النظرية ببند (٧٩) لاستنباط أن الدالة (٦) توافقية فى نصف المستوى هذا . الشروط الحدية لكلتا الدالتين التوافقيين واحدة على الأجزاء المتناظرة من الحدود وذلك لأنهم من النوع $T=c$ الذى سبق معالجته فى النظرية ببند (٨٠) . وبالتالى فإن الدالة المحدودة (٦) هى الحل المطلوب للمسألة الأصلية . ويمكننا بالطبع أن نتحقق مباشرة من أن الدالة (٦) تحقق معادلة لابلاس وأن لها قيم تؤول إلى تلك القيم المشار إليها بشكل (٦١) عندما تقترب النقطة (x,y) من محور السينات من أعلى .

متساويات درجة الحرارة $T(x,y) = c \ (0 < c < 1)$ هى الدوائر

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{\tan \pi c}y = 1$$

التى تقع مراكزها على محور الصادات والمارة بالنقطتين $(\pm 1,0)$

أخيرا ، يجب أن نلاحظ أنه حيث أن ناتج ضرب دالة توافقية فى مقدار ثابت يكون أيضاً دالة توافقية ، فإن الدالة

$$T = \frac{T_0}{\pi}\arctan\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right) \qquad (0 \leqq \arctan t \leqq \pi)$$

تمثل درجات الحرارة المستقرة فى نصف المستوى المعطى عند إبدال الشرط الحدى أن درجة الحرارة تساوى الوحدة على امتداد الحافة $-1 < x < 1, y = 0$ بالشرط الحدى أن درجة الحرارة على امتداد نفس الحافة تكون ثابتة وتساوى T_0 .

٨٣ – مسألة ذات صلة بالمسألة السابقة A Related Problem

اعتبر بلاطة نصف لا نهائية فى الفراغ الثلاثى البعد محدودة بالمستويات : $x = \pm\pi/2$ و $y = 0$ وحفظ السطحين الأولين عند درجة حرارة صفر وحفظ السطح الأخير عند درجة حرارة 1 . هدفنا هو إيجاد صيغة لدرجة الحرارة $T(x,y)$ عند أى نقطة داخلية من نقط البلاطة . المسألة هى أيضاً إيجاد درجات الحرارة فى صفيحة رقيقة على صورة شريحة نصف لا نهائية $-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2, \ y \geqq 0$ بإفتراض أن وجهى الصفيحة معزولان تماماً (شكل (٦٢)) .

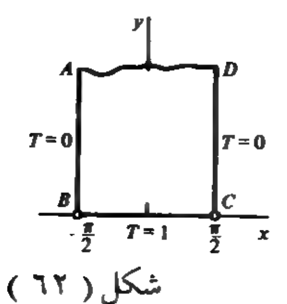
مسألة الشروط الحدية المطلوب حلها هنا هى

$$T_{xx}(x,y) + T_{yy}(x,y) = 0 \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\right), \tag{١}$$

$$T\left(-\frac{\pi}{2},y\right) = T\left(\frac{\pi}{2},y\right) = 0 \qquad (y > 0), \tag{٢}$$

$$T(x,0) = 1 \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{٣}$$

حيث T(x,y) محدودة .



شكل (٦٢)

بالنظر إلى بند (٣٩) ، وكذا شكل (٩) بملحق (٢) ، الراسم

$$w = \sin z \tag{٤}$$

يحول مسألة الشروط الحدية أعلاه إلى مسألة الشروط الحدية التى صيغت فى البند السابق (شكل (٦١)) . إذن بالرجوع إلى الحل (٦) بالبند السابق ، يمكننا أن نكتب

$$T = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2v}{u^2 + v^2 - 1}\right) \qquad (0 \leqq \arctan t \leqq \pi). \tag{٥}$$

تغيير المتغيرات المعطى بالمعادلة (٤) يمكن كتابته

$$u = \sin x \cosh y, \qquad v = \cos x \sinh y;$$

وبذلك تصبح الدالة التوافقية (٥) :

$$T = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2 \cos x \sinh y}{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y - 1}\right).$$

ويجب ملاحظة أن المقام هنا يختزل إلى $\sinh^2 y - \cos^2 x$ ، وبالتالى فإنه يمكن كتابة الكسر على الصورة

$$\frac{2 \cos x \sinh y}{\sinh^2 y - \cos^2 x} = \frac{2 \cos x/\sinh y}{1 - (\cos x/\sinh y)^2} = \tan 2\alpha$$

حيث $\tan \alpha = \cos x/\sinh y$. إذن $\pi T = 2\alpha$ ، وصيغتنا للدالة T تصبح

$$T = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\cos x}{\sinh y}\right) \qquad \left(0 \leqq \arctan t \leqq \frac{\pi}{2}\right). \tag{٦}$$

مدى معكوس دالة الظل هنا من صفر إلى $\pi/2$ وذلك حيث أن سعتها غير سالبة .

الآن ، حيث أن الدالة $\sin z$ شاملة والدالة (٥) توافقية فى نصف المستوى $v > 0$ ، فإن الدالة (٦) تكون توافقية فى الشريحة $-\pi/2 < x < \pi/2,\ y > 0$ أيضاً ، الدالة (٥) تحقق الشروط الابتدائية $T = 1$ عندما $|u| < 1$ أو $v = 0$ ، $T = 0$ عندما $|u| > 1$ و $v = 0$ الدالة (٦) تحقق إذن الشروط الحدية (٢) ، (٣) . بالإضافة إلى ذلك ، فإن $|T(x,y)| \leqq 1$ عند كل نقطة من نقط الشريحة . الصيغة (٦) إذن هى صيغة درجة الحرارة التى نبحث عنها .

متساويات درجة الحرارة $T(x,y) = c$ فى البلاطة هى السطوح

$$\cos x = \tan \frac{\pi c}{2} \sinh y,$$

التى يمر كل منها بالنقطتين $(\pm\pi/2,0)$ فى المستوى xy . إذا كان K التوصيل الحرارى ، فإن الفيض الحرارى إلى داخل البلاطة من خلال السطح الواقع فى المستوى $y = 0$ يكون

$$-KT_y(x,0) = \frac{2K}{\pi \cos x} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right);$$

وأن الفيض الحرارى إلى خارج البلاطة من خلال السطح الواقع فى المستوى $x = \pi/2$ يكون

$$-KT_x\left(\frac{\pi}{2},y\right) = \frac{2K}{\pi \sinh y} \qquad (y > 0).$$

مسألة الشروط الحدية التى عرضنا لها فى هذا البند يمكن حلها أيضاً باستخدام طريقة فصل المتغيرات . وطريقة فصل المتغيرات مباشرة أكثر ، ولكنها تعطى الحل على صورة متسلسلة لا نهائية[1]

(١) نفس المسألة قد عولجت أساسا فى كتاب ر. ف. تشرشل R.V.Churchill المعنون
"Fourier Series and Boundary Value problems"
الطبعة الثانية ، تمارين ٣ و ٤ ، ص ١٥٠ ، ١٥١ ، ١٩٦٣ . كذلك ، سيجد القارىء معالجة مختصرة لوحدانية حلول مسائل الشروط الحدية وذلك بالباب العاشر من هذا الكتاب .

٨٤ – درجات الحرارة فى ربع مستوى جزء من أحد حافتيه معزول حراريا
Temperatures in a Quadrant with Part of One Boundary Insulated

دعنا نوجد درجات الحرارة المستقرة فى صفيحة رقيقة مكونة من ربع المستوى إذا كانت القطعة المستقيمة عند نهاية إحدى الحافتين معزولة حراريا وإذا كانت درجة حرارة بقية هذه الحافة محفوظة عند درجة حرارة ثابتة وإذا كانت الحافة الثانية محفوظة عند درجة حرارة ثابتة أخرى . الأوجه معزولة وبالتالى فإن المسألة تكون ثنائية البعد .

مقياس درجة الحرارة ووحدة الطول يمكن اختيارهما بحيث تأخذ مسألة الشروط الحدية لدالة درجة الحرارة T الصورة

$$T_{xx}(x,y) + T_{yy}(x,y) = 0 \qquad (x > 0, y > 0), \tag{١}$$

$$\begin{cases} T_y(x,0) = 0 & \text{طالما} \quad , \quad 0 < x < 1 \\ T(x,0) = 1 & \text{طالما} \quad , \quad x > 1 \end{cases} \tag{٢}$$

$$T(0,y) = 0 \qquad (y > 0), \tag{٣}$$

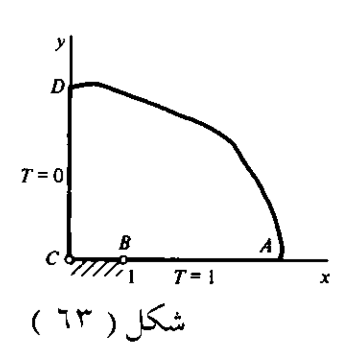
حيث الدالة T(x,y) محدودة فى ربع المستوى المشار إليه . الصفيحة وشروطها الحدية موضحين بشكل (٦٣) .

الشروط (٢) تشير إلى قيمة المشتقة للدالة T فى الاتجاهالعمودىعلى جزء من خط حدى وقيمة الدالة نفسها على بقية هذا الخط الحدى . طريقة فصل المتغيرات السابق ذكرها فى نهاية البند السابق ليست ملائمة لهذا النوع من المسائل الذى يحوى شروطا مختلفة النوع على امتداد نفس الخط الحدى .

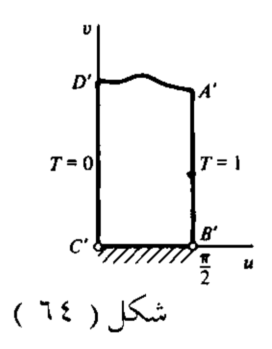
كما أشرنا بشكل (١٠) بملحق (٢) ، التحويلة

$$z = \sin w \tag{٤}$$

تكون راسما أحاديا من الشريحة $0 \leqq u \leqq \pi/2, v \geqq 0$ فوق ربع المستوى $x \geqq 0, y \geqq 0$. لاحظ الآن أن تحقق وجود دالة عكسية لهذه الدالة يكون مؤكدا وذلك بالنظر إلى حقيقة أن التحويلة المعطاة تكون تناظرا أحاديا . حيث أن sin w حافظة للزوايا الموجهة لجميع نقط الشريحة فيما عدا عند النقطة $w = \pi/2$ ، فإن التحويلة العكسية لابد وأن تكون حافظة أيضاً للزوايا الموجهة لجميع نقط ربع المستوى فيما عدا عند النقطة $z = 1$. هذه التحويلة العكسية ترسم القطعة المستقيمة $0 < x < 1, y = 0$ من حدود ربع المستوى فوق قاعدة الشريحة وترسم بقية حدود ربع المستوى فوق جوانب الشريحة كما هو موضح بشكل (٦٤) .



شكل (٦٣)



شكل (٦٤)

حيث أن التحويلة العكسية (٤) تكون حافظة للزوايا الموجهة فى ربع المستوى ، فيما عدا عندما $z=1$ ، فإن الحل للمسألة المعطاة يمكن الحصول عليه بإيجاد دالة توافقية فى الشريحة تحقق الشروط الحدية المعطاة بشكل (٦٤) . لاحظ أن هذه الشروط الحدية هى من النوع $T=c$ و $dT/dn=0$

من الواضح أن دالة درجة الحرارة T المطلوبة لمسألة الشروط الحدية الجديدة هى

$$T = \frac{2}{\pi} u, \tag{٥}$$

حيث الدالة $2u/\pi$ هى بالطبع الجزء الحقيقى للدالة الشاملة $2w/\pi$. يجب علينا الآن التعبير عن T بدلالة المتغيرين y,x .

للحصول على u بدلالة y,x ، يجب أولا أن نلاحظ أن معادلة (٤) تعطى

$$x = \sin u \cosh v, \qquad y = \cos u \sinh v; \tag{٦}$$

وبالتالى

$$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1. \tag{٧}$$

عند حل هذه المعادلة الأخيرة للحصول على u يكون من المناسب أن نلاحظ أن – لكل قيمة ثابتة للمقدار u- بؤرتى القطع الزائد (٧) تقعان عند النقطتين $(\pm 1,0)$ فى المستوى xy وأن طول المحور القاطع يساوى $2 \sin u$. وبذلك يكون الفرق بين بعدى البؤرتين عن نقطة (x,y) من نقط جزء القطع الزائد الواقع فى الربع الأول من المستوى هو

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 \sin u.$$

بالنظر إلى معادلة (٥) ، تكون دالة درجة الحرارة المطلوبة فى المستوى xy هى

$$T = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} \left[\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right] \tag{٨}$$

حيث مدى دالة الجيب العكسية من صفر إلى $\pi/2$ وذلك لأن $0 \leqq u \leqq \pi/2$
إذا أردنا أن نتحقق من أن هذه الدالة تحقق الشروط الحدية (٢) ، فإنه يجب أن نتذكر أن $\sqrt{(x-1)^2}$ يرمز للمقدار x-1 طالما $x > 1$ وللمقدار $1-x$ طالما $0 < x < 1$ ، أى أن الجذور التربيعية دائماً موجبة . لاحظ أيضاً أن درجة الحرارة عند أى نقطة من نقط الجزء المعزول من الحافة السفلى للصفيحة هى

$$T(x,0) = \frac{2}{\pi} \arcsin x.$$

من معادلة (٥) يمكننا أن نرى أن متساويات درجة الحرارة T(x,y) = c هى الأجزاء الواقعة فى الربع الأول من القطاعات الزائدة المتحدة البؤر (٧) ، حيث $u = \pi c/2$. حيث أن الدالة $2v/\pi$ مرافق توافقى للدالة (٥) ، فإن خطوط الفيض هى أرباع القطاعات الناقصة المتحدة البؤر التى نحصل عليها بجعل v ثابتة فى المعادلات (٦) .

تمــاريــن

١ – فى مسألة الصفيحة النصف لانهائية الموضحة على اليسار بشكل (٦١) ، أوجد مرافق توافقى لدالة الحرارة T(x,y) من معادلة (٥) ببند (٨٢) ومن ثم إوجد خطوط سريان الحرارة . بين أن هذه الخطوط تتكون من النصف العلوى لمحور الصادات ، والانصاف العليا لدوائر معينة على كل من جانبى هذا المحور ، وكذلك الدوائر التى تقع مراكزها على القطعة المستقيمة AB أو القطعة المستقيمة CD من محور السينات .

٢ – بين أنه إذا لم يكن من المطلوب أن تكون الدالة T الواردة ببند (٨٢) محدودة ، فإن الدالة التوافقية (٤) بنفس البند يمكن إحلالها بالدالة التوافقية

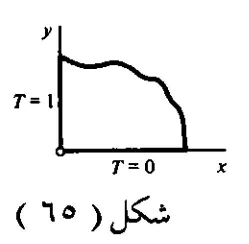
$$T = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\pi} w + A \cosh w\right) = \frac{1}{\pi} v + A \sinh u \sin v$$

حيث A ثابت اختيارى حقيقى . من ذلك استنتج أن حل مسألة دريشلت للشريحة الموضحة بشكل (٦١) فى المستوى uv لن يكون وحيدا فى تلك الحالة .

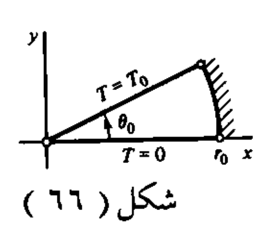
٣ – افترض استبعاد الشرط أن تكون الدالة T محدودة فى مسألة درجات الحرارة فى البلاطة النصف لا نهائية ببند (٨٣) (شكل (٦٢)) . بين أن بالإمكان الحصول إذن على عدد لا نهائى من الحلول وذلك باعتبار تأثير إضافة الجزء التخيلى للدالة A sin z للحل الذى حصلنا عليه هناك ، حيث A ثابت اختيارى حقيقى .

٤ – استخدم الدالة Log z للحصول على صيغة لدرجات الحرارة المستقرة المحدودة فى صفيحة على شكل ربع المستوى $x \geqq 0, y \geqq 0$ إذا كان وجهاها معزولين تماماً وكانت درجات حرارة حوافها هى $T(x,0) = 0$ و $T(0,y) = 1$ (شكل (٦٥)) . أوجد متساويات درجة الحرارة وخطوط الفيض وارسم بعضا منها .

الإجابة : $T = (2/\pi) \arctan (y/x)$



شكل (٦٥)



شكل (٦٦)

٥ - أوجد درجات الحرارة المستقرة فى جسم مصمت على شكل وتد اسطوانى طويل إذا كانت المستويات التى تحده وهى $\theta = 0$ و $\theta = \theta_0$ ، محفوظة عند درجات الحرارة الثابتة صفر و T_0 على الترتيب وكان سطحها $r = r_0$ معزولاً تماماً (شكل (٦٦)) .

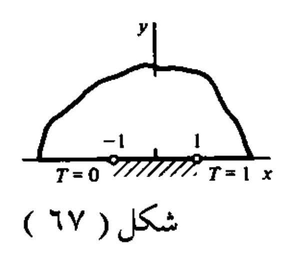
الإجابة : $T = (T_0/\theta_0) \arctan (y/x)$

٦ - أوجد درجات الحرارة المستقرة المحدودة $T(x,y)$ فى الجسم المصمت النصف لانهائى $y \geqq 0$ إذا كانت $T = 0$ على الجزء $x < -1, y = 0$ من الحدود وكانت $T = 1$ على الجزء $x > 1, y = 0$ ، وإذا كانت الشريحة $-1 < x < 1, y = 0$ من الحدود معزولة (شكل (٦٧)) .

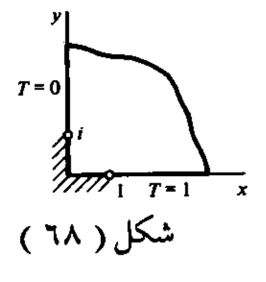
الإجابة :

$$T = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} [\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}]$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \arcsin t \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$



شكل (٦٧)



شكل (٦٨)

٧ - أوجد درجات الحرارة المستقرة المحدودة فى الجسم المصمت $x \geqq 0, y \geqq 0$ إذا حفظت السطوح المحددة للجسم عند درجات حرارة ثابتة فيما عدا الشرائح المعزولة المتساوية فى العرض عند الزاوية ، كما هو موضح بشكل (٦٨) .

الإجابة : $T=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}\left[\sqrt{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}-\sqrt{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2}\right]$

$$\left(-\frac{\pi}{2}\leqq \arcsin t\leqq\frac{\pi}{2}\right).$$

٨ - حل مسألة دريشلت التالية للشريحة النصف لا نهائية (شكل (٦٩)) :

$$H_{xx}(x,y)+H_{yy}(x,y)=0 \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2},\, y>0\right),$$

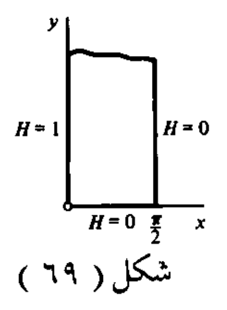
$$H(x,0)=0 \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

$$H(0,y)=1, \qquad H\left(\frac{\pi}{2},y\right)=0 \qquad (y>0),$$

حيث $0\leqq H(x,y)\leqq 1$

اقتراح : هذه المسألة يمكن تحويلها إلى تلك المعطاة بتمرين (٤) .

الإجابة : $H=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\tanh y}{\tan x}\right)$



شكل (٦٩)

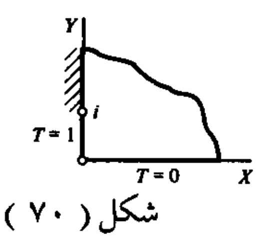
٩ - اشتق صيغة لدرجات الحرارة $T(r,\theta)$ فى صفيحة نصف دائرية $r\leqq 1, 0\leqq\theta\leqq\pi$ ذات أوجه معزولة إذا كان $T=1$ على امتداد الحافة النصف قطرية $\theta=0$ وكان $T=0$ على الجزء الباقى من الحدود .

اقتراح : هذه المسألة يمكن تحويلها إلى تلك المعطاة بتمرين (٨) .

الإجابة : $T=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1-r}{1+r}\cot\frac{\theta}{2}\right)$

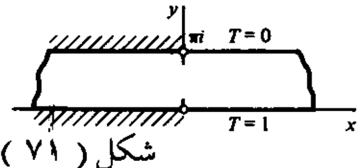
١٠ - حل مسألة الشروط الحدية للصفيحة $X\geqq 0,\ Y\geqq 0$ فى المستوى Z إذا كانت الأوجه معزولة وكانت الشروط الحدية كما هو موضح بشكل (٧٠) .

اقتراح : باستخدام الراسم $z=i/Z$ حول هذه المسألة إلى المسألة التى سبق طرحها ببند (٨٤) (شكل (٦٣)) .



شكل (٧٠)

١١ - الأجزاء $x < 0, y = \pi$ و $x < 0, y = 0$ من حواف صفيحة لا نهائية $0 \leqq y \leqq \pi$ معزولة حراريا ، وكذلك أوجه الصفيحة . الشروط $T(x,\pi) = 0$ و $T(x,0) = 1$ متحققة طالما كان $x > 0$ (شكل (٧١)) . إوجد درجات الحرارة المستقرة فى الصفيحة .
اقتراح : هذه المسألة يمكن تحويلها إلى تلك المعطاة بتمرين (٦) .



شكل (٧١)

١٢ - صفيحة رقيقة نصف ناقصية الشكل فى المستوى uv (شكل (١١) بملحق (٢)) ذات أوجه معزولة حراريا . درجة الحرارة على جزء القطع الناقص من حدودها تكون $T = 1$. درجة الحرارة على امتداد القطعة المستقيمة $-1 < u < 1, v = 0$ تكون $T = 0$ ، وبقية الحدود على امتداد محور الاحداثيات u معزولة حراريا . إوجد خطوط سريان الحرارة .

١٣ طبقاً لتمرين (١١) و (١٢) ببند (٥٥) ، إذا كانت الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ متصلة فى منطقة مغلقة محدودة R وكانت تحليلية ولكن ليست ثابتة فى داخلية R ، فإن الدالة u(x,y) تأخذ قيمها العظمى والصغرى على حدود R ، وليس بأى حال من الأحوال فى داخلية R . باعتبار u(x,y) على أنها درجات حرارة مستقرة ، اذكر تفسيرا فيزيائيا يوضح لماذا لابد أن تكون خاصية القيم العظمى والصغرى تلك صحيحة .

٨٥ - جهد الكهرباء الساكنة Electrostatic Potential

فى مجال لقوى كهرباء ساكنة تكون **شدة المجال Field intensity** عند نقطة ما متجها يمثل القوة المبذولة على وحدة شحنات موجبة موضوعة عند تلك النقطة . **جهد Potential** الكهرباء الساكنة يكون دالة قياسية فى إحداثيات الفراغ بحيث تكون مشتقتها الاتجاهية عند أى نقطة فى اتجاه ما هى المعكوس الجمعى لمركبة شدة المجال فى هذا الاتجاه .

مقدار قوة الجذب أو التنافر التى يؤثر بها جسيم مشحون ساكن على جسيم مشحون ساكن آخر يتناسب طرديا مع حاصل ضرب شحنتى الجسيمان ويتناسب عكسيا مع مربع البعد بينهما. من قانون التربيع العكسى هذا ، يمكن إثبات أن الجهد عند نقطة – الناشىء من جسيم مشحون مفرد فى الفراغ يتناسب عكسيا مع البعد بين النقطة والجسيم . فى أى منطقة خالية من الشحنات من الممكن إذن أن نبين أن الجهد الناشىء من شحنات موزعة خارج تلك المنطقة يحقق معادلة لابلاس للفراغ الثلاثى البعد .

إذا كانت الشروط هى أن الجهد **V** يكون ثابتا على كل مستوى مواز للمستوى **xy** ، فإن فى المناطق الخالية من الشحنات يكون الجهد **V** دالة توافقية فى المتغيرين **x,y** فقط :

$$V_{xx}(x,y) + V_{yy}(x,y) = 0.$$

متجه شدة المجال عند أى نقطة يكون مواز للمستوى **xy** ومركبتيه السينية والصادية هما $-V_x(x,y)$ و $-V_y(x,y)$ على الترتيب . هذا المتجه هو إذن المعكوس الجمعى لمتجه ميل الدالة **V(x,y)** .

السطح الذى تكون عليه الدالة **V(x,y)** ثابتة يسمى **متساوى الجهد** **Equipotential** المركبة المماسية لمتجه شدة المجال عند نقطة ما على سطح موصل تنعدم فى الحالة الساكنة وذلك حيث أن الشحنات حرة فى أن تتحرك على مثل هذا السطح . إذن **V(x,y)** تكون ثابتة على امتداد سطح جسم موصل وأن هذا السطح يكون **متساوى الجهد** **Equipotential** .

إذا كان **U** مرافق توافقى للدالة **V** ، فإن المنحنيات **U(x,y) = c** فى المستوى **xy** تسمى **خطوط الفيض** **Flux lines** . عندما يتقاطع أحد هذه المنحنيات مع منحنى متساوى الجهد فى نقطة تكون عندها مشتقة الدالة التحليلية $V(x,y) + iU(x,y)$ لا تساوى صفر ، فإن المنحنيان يكونان متعامدين عند تلك النقطة وتكون شدة المجال مماسة لخط الفيض هناك .

مسائل الشروط الحدية للجهد **V** هى نفس المسائل الرياضية لدرجات الحرارة المستقرة **T** ، وكما فى حالة درجات الحرارة المستقرة تكون طرق المتغيرات المركبة المستخدمة قاصرة على المسائل الثنائية البعد . فعلى سبيل المثال ، المسألة التى طرحت ببند (٨٣) (شكل (٦٢)) يمكن صياغتها على أساس أن المطلوب هو إيجاد جهد الكهرباء الساكنة الثنائى البعد فى الفراغ الخالى $-\pi/2 < x < \pi/2,\ y > 0$ المكون من المستويات الموصلة $x = \pm\pi/2$ و $y = 0$ ، والمعزولة عند تقاطعاتها، إذا ما حفظ السطحين الأولين عند جهد صفر وحفظ السطح الثالث عند جهد مقداره الوحدة . مثل هذا النوع من المسائل يظهر

كثيرا فى مجال دراسة الالكترونيات . إذا كان فراغ الشحنة داخل أنبوبة مفرغة صغيرا ، فإنه يمكن أحياناً اعتبار أن الفراغ حر من الشحنة ويمكن افتراض أن الجهد هناك يحقق معادلة لابلاس .

الجهد فى حالة السريان المستقر للكهرباء فى صفيحة مستوية موصلة تكون أيضاً دالة توافقية عند النقط الخالية من المنابع والمصارف . جهد الجاذبية مثال آخر لدالة توافقية فى الفيزياء .

٨٦ – الجهد فى فراغ اسطوانى Potential in a Cylindrical Space

صنعت اسطوانة دائرية قائمة طويلة ومجوفة من لوح رقيق من مادة موصلة ، وقسمت الاسطوانة إلى جزئين متساويين على امتداد راسمين من رواسمها . فصل بين هذين الجزئين بواسطة شرائط رقيقة من مادة عازلة واستخدما كقطبين ، أحدهما استخدم كأرضى جهده صفر وحفظ الآخر عند جهد مختلف ثابت . سنأخذ محاور الإحداثيات ووحدات الطول وفرق الجهد كما هو موضح بشكل (٧٢) . ومن ثم فإننا نعبر عن جهد الكهرباء الساكنة $V(x,y)$ على أى مقطع ، من الفراغ المحتوى ، يقع بعيدا عن نهايتى الاسطوانة كدالة توافقية داخل الدائرة $x^2+y^2=1$ فى المستوى xy ، وأيضاً $V=o$ على النصف العلوى من الدائرة و $V=1$ على النصف السفلى من الدائرة .

سبق أن قدمنا تحويلة خطية كسرية ترسم نصف المستوى العلوى فوق داخلية دائرة الوحدة التى مركزها نقطة الأصل ، وترسم الجزء الموجب من المحور الحقيقى فوق نصف الدائرة العلوى ، وترسم الجزء السالب من المحور الحقيقى فوق نصف الدائرة السفلى فى تمرين (١١) ببند (٣٤) . النتيجة معطاة بشكل (١٣) بملحق (٢) ، بوضع w,z كل مكان الآخر ، فإننا نجد أن معكوس التحويلة

$$z=\frac{i-w}{i+w} \qquad (١)$$

يعطينا مسألة جديدة للدالة V فى نصف مستوى ، كما هو موضح بشكل (٧٣) .

لاحظ الآن أن الجزء التخيلى للدالة

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Log} w=\frac{1}{\pi}\operatorname{Log}\rho+\frac{i}{\pi}\phi \qquad (\rho>0,\ 0\leqq\phi\leqq\pi) \qquad (٢)$$

يكون دالة محدودة فى v,u تأخذ القيم الثابتة المطلوبة على الجزئين ، $\varphi=\pi$ و $\phi=0$ من محور الاحداثيات u . الدالة التوافقية المطلوبة لنصف المستوى تكون إذن

$$V=\frac{1}{\pi}\arctan\frac{v}{u}, \qquad (٣)$$

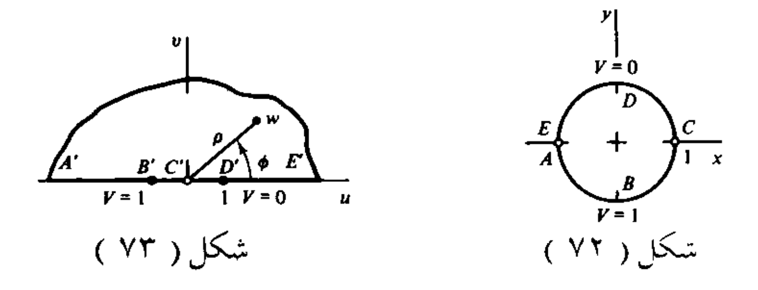
حيث قيم معكوس دالة الظل تقع بين صفر و π .

معكوس التحويلة (١) هى

$$w = i\,\frac{1-z}{1+z}, \tag{٤}$$

ومنها يمكن التعبير عن v,u بدلالة y,x . بذلك تصبح معادلة (٣)

$$V = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1-x^2-y^2}{2y}\right) \qquad (0 \leqq \arctan t \leqq \pi). \tag{٥}$$



شكل (٧٢) شكل (٧٣)

الدالة (٥) هى دالة الجهد للفراغ المغلف بالأقطاب الاسطوانية وذلك حيث أنها توافقية داخل الدائرة وتأخذ القيم المطلوبة على أنصاف الدوائر . إذا أردنا أن نتحقق من هذا الحل فإننا يجب أن نلاحظ أن

$$\lim_{t\to 0} \arctan t = 0 \qquad (t > 0)$$

و

$$\lim_{t\to 0} \arctan t = \pi \qquad (t < 0).$$

المنحنيات المتساوية الجهد $V(x,y)=c$ فى المنطقة الدائرية تكون أقواس من الدوائر

$$x^2 + y^2 + 2y \tan \pi c = 1,$$

التى يمر كل منها بالنقطتين $(\pm 1,0)$. كذلك ، القطعة المستقيمة من محور السينات الواقعة بين هاتين النقطتين هى منحنى متساوى الجهد $V(x,y) = 1/2$. مرافق توافقى U للدالة V هو $(-1/\pi)\,\mathrm{Log}\,\rho$ ، وهو عبارة عن الجزء التخيلى للدالة $(-i/\pi)\,\mathrm{Log}\,w$. بأخذ معادلة (٤) فى الاعتبار ، فإنه يمكن كتابة U على الصورة

$$U = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Log}\left|\frac{1-z}{1+z}\right|.$$

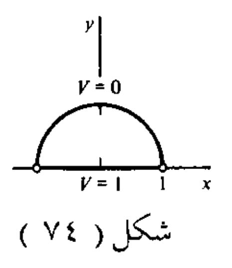
من هذه المعادلة يمكن أن نرى أن خطوط الفيض $U(x,y)=c$ تكون أقواس من دوائر مراكزها على محور السينات . القطعة المستقيمة من محور الصادات المحصورة بين القطبين تكون أيضاً خط فيض .

تمـــاريـن

١ -الدالة التوافقية (٣) ببند (٨٦) تكون محدودة فى نصف المستوى $v \geq 0$ وتحقق الشروط الابتدائية المبينة بشكل (٧٣) . اثبت أنه إذا أضيف الجزء التخيلى للدالة Ae^{w} ، حيث A أى ثابت حقيقى ، للدالة (٣) فإن الدالة الناتجة تحقق جميع الشروط عدا أن تكون الدالة محدودة .

٢ -اثبت أن التحويلة (٤) ببند (٨٦) ترسم النصف العلوى للمنطقة الدائرية الموضحة بشكل (٧٢) فوق الربع الأول من المستوى المركب w وترسم القطر CE فوق الجزء الموجب من محور الاحداثيات v . من ثم إوجد جهد الكهرباء الساكنة V فى الفراغ المحدود بنصف الاسطوانة $x^2 + y^2 - 1, y \geqq 0$ والمستوى y = o عندما V = o على السطح الاسطوانى و V = 1 على السطح المستوى (شكل (٧٤)) .

الإجابة : $V \quad \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{1 - x^2 - y^2}{2y}\right).$



شكل (٧٤)

٣ أوجد جهد الكهرباء الساكنة $V(r,\theta)$ فى الفراغ $0 < r < 1, 0 < \theta < \pi/4$ المحدود بنصفى المستويين θ ٠ و $\theta = \pi/4$ والجزء $0 \leq \theta \leqq \pi/4$ من السطح الاسطوانى r = 1 عندما V = 1 على الحدود المستوية و V = O على الحد الاسطوانى . (انظر تمرين (٢)) . تحقق من أن دالتك تحقق هذه الشروط الحدية .

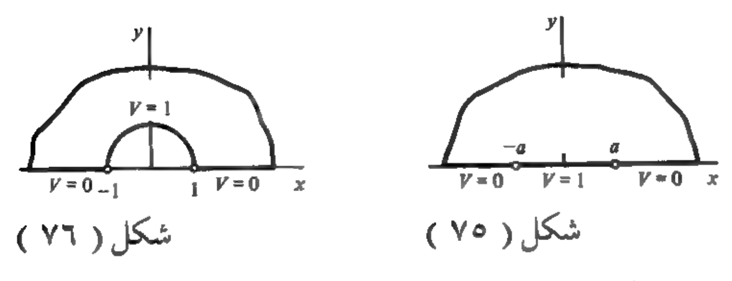
٤ -لاحظ أن جميع أفرع الدالة log z لها نفس المركبة الحقيقية التى تكون توافقية عند جميع النقط عدا نقطة الأصل . ثم اكتب صيغة لدالة جهد الكهرباء الساكنة V(x,y) فى الفراغ المحصور بين سطحين اسطوانيين $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = r_0{}^2$ حيث $r_0 \neq 1$ متحدى المحور وموصلين إذا كان V = o على السطح الأول و V = 1 على السطح الثانى .

الإجابة : $V = \frac{\text{Log}\,(x^2 + y^2)}{2\,\text{Log}\, r_0}$

٥ -أوجد جهد الكهرباء الساكنة V(x,y) المحدود فى الفراغ $y > 0$ المحدود بمستوى لا نهائى موصل y = o إذا كانت إحدى شرائحه $(a < x < a, \; y = 0)$ معزولة عن بقية

المستوى وحفظت عند جهد $V=1$ ، بينما $V=0$ على بقية المستوى (شكل (٧٥)) . تحقق من أن دالتك تحقق الشروط الحدية المعطاة .

الإجابة : $V=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}\right)\ (0\leqq \arctan t\leqq \pi).$



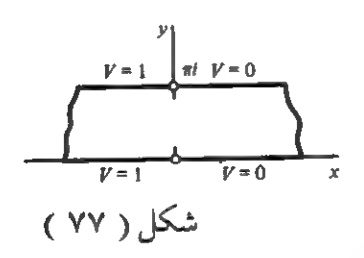
شكل (٧٦) شكل (٧٥)

٦ -اشتق صيغة لجهد الكهرباء الساكنة فى الفراغ الموضح بشكل (٧٦) ، والمحدود بنصفى مستويين ونصف اسطوانة ، إذا كانت $V=1$ على السطح الاسطوانى وكانت $V=0$ على السطحين المستويين . ارسم بعض المنحنيات المتساوية الجهد فى المستوى xy .

الإجابة : $V=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right)$

٧ -أوجد الجهد V فى الفراغ بين المستويين $y=0$ و $y=\pi$ إذا كان $V=0$ على الجزء من كلا المستويين بحيث $x>0$ وكان $V=1$ على الجزئين بحيث $x<0$ (شكل (٧٧)) . تأكد من أن نتيجتك تحقق الشروط الحدية .

الإجابة : $V=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\sin y}{\sinh x}\right)\ (0\leqq \arctan t\leqq \pi).$



شكل (٧٧)

٨ -اشتق صيغة لجهد الكهرباء الساكنة V فى الفراغ الداخلى لاسطوانة طويلة $r=1$ إذا كان $V=0$ على الربع الأول $(r=1, 0<\theta<\pi/2)$ للسطح الاسطوانى و $V=1$ على بقية السطح الاسطوانى$(r=1, \pi/2<\theta<2\pi)$ انظر شكل (٢٤) وتمرين (١٤) ببند (٣٤)) . بين أن V 3/4 على محور الاسطوانة . تحقق من أن الصيغة التى حصلت عليها تحقق الشروط الحدية .

٩ -باستخدام شكل (٢٠) بملحق (٢) أوجد دالة حرارة T(x,y) توافقية فى النطاق المظلل من

المستوى xy الموضح هناك والتى تأخذ القيم T = o على نصف الدائرة ABC و T = 1 على امتداد القطعة المستقيمة DEF . تحقق من أن دالتك تحقق الشروط الحدية المطلوبة . (انظر تمرين (٢)).

١٠ -يمكن حل مسألة دريشلت :

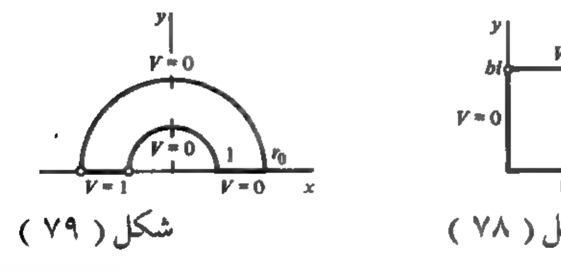
$$V_{xx}(x,y) + V_{yy}(x,y) = 0 \qquad (0 < x < a, 0 < y < b),$$
$$V(x,0) = 0, \qquad V(x,b) = 1 \qquad (0 < x < a),$$
$$V(0,y) = V(a,y) = 0 \qquad (0 < y < b)$$

للدالة V(x,y) فى مستطيل (شكل (٧٨)) باستخدام طريقة فصل المتغيرات[1] . الحل هو

$$V = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh (m\pi y/a)}{m \sinh (m\pi b/a)} \sin \frac{m\pi x}{a} \qquad (m = 2n - 1).$$

مع افتراض قبول هذه الصيغة ، أوجد الجهد $V(r,\theta)$ فى الفراغ $1 < r < r_0, 0 < \theta < \pi$ إذا كان V = 1 على جزء الحدود حيث $\theta = \pi$ و $V = 0$ على بقية الحدود (شكل (٧٩)) .

الإجابة :
$$V = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \alpha_n \theta}{\sinh \alpha_n \pi} \frac{\sin (\alpha_n \operatorname{Log} r)}{2n - 1} \quad \left[\alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{\operatorname{Log} r_0}\right].$$



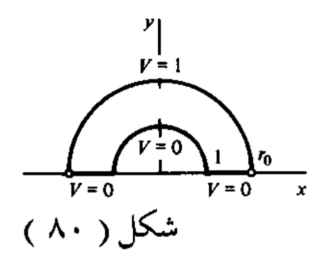
شكل (٧٩) شكل (٧٨)

١١ -بمعاونة الصيغة التى حصلنا عليها فى تمرين (١٠) للدالة V(x,y) فى المستطيل ، أوجد دالة الجهد $V(r,\theta)$ للفراغ $1 < r < r_0, 0 < \theta < \pi$ إذا كان V = 1 على جزء الحدود بحيث $r = r_0, 0 < \theta < \pi$ وكان V = o على الجزء الباقى من الحدود (شكل (٨٠))

الإجابة :
$$V = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^m - r^{-m}}{r_0^m - r_0^{-m}} \frac{\sin m\theta}{m} \ (m = 2n - 1).$$

---

(١) انظر كتاب ر .ڤ. تشرشل R.V. Churchill
"Fourier Series and Boundary Value Problems"
الطبعة الثانية ، ص ١٤٧ – ١٤٨ ، ١٩٦٣ .



شكل (٨٠)

٨٧ – السريان ثنائى البعد لسائل Two-dimensional Fluid Flow

تلعب الدوال التوافقية دورا هاما فى دراسة ديناميكا الموائع وديناميكا الهواء . مرة أخرى ، سنعتبر فقط المسائل المتعلقة بالحالات الثنائية البعد المستقرة . بمعنى أننا سندرس فقط الحالات التى يفترض فيها أن تكون حركة السائل متماثلة فى جميع المستويات الموازية للمستوى **xy** ، وسرعة السائل تكون موازية للمستوى **xy** ولا تتوقف على الزمن . بهذا يكون من الكافى أن نعتبر فقط حركة صفيحة رقيقة من السائل فى المستوى **xy** .

سنفترض أن المتجه الممثل للعدد المركب

$$V = p + iq$$

يرمز لسرعة نقطة مادية من السائل عند أى نقطة **(x,y)** ، أى أن المركبة السينية والمركبة الصادية لمتجه السرعة هما $p(x,y)$ و $q(x,y)$ على الترتيب . عند النقط الداخلية لمنطقة ، من مناطق السريان ، لا يوجد فيها منابع أو مصارف للسائل ، سيفترض أن الدالتين $p(x,y)$ و $q(x,y)$ وكذلك مشتقاتهما الجزئية الأولى جميعها متصلة .

يعرف **جريان Circulation** السائل على امتداد أى كفاف **C** على أنه التكامل الخطى ، بالنسبة لطول القوس σ ، للمركبة المماسية $V_T(x,y)$ لمتجه السرعة على امتداد **C** :

$$\int_C V_T(x,y)\, d\sigma. \qquad (١)$$

النسبة بين الجريان على امتداد **C** وطول الكفاف **C** يكون بالتالى سرعة متوسطة للسائل على امتداد هذا الكفاف . سبق أن شاهدنا فى حساب التفاضل والتكامل للمتغيرات الحقيقية أن التكاملات التى على الصورة (١) يمكن كتابتها على الصورة[1]

$$\int_C p(x,y)\, dx + q(x,y)\, dy. \qquad (٢)$$

---

(١) لمزيد من المعلومات عن خواص التكاملات الخطية فى حساب التفاضل والتكامل للمتغيرات الحقيقية والمستخدمة فى هذا البند والبند التالى انظر ، على سبيل المثال ، كتاب . وكابلان **W. Kaplan** "Advanced Calculus," ، الطبعة الثانية ، ص ٢٩٣ ، ١٩٧٣ .

عندما يكون C كفاف مغلق بسيط يقع فى نطاق بسيط الترابط للسريان لا يحوى أى منابع أو مصارف ، فإن نظرية جرين تسمح لنا بأن نكتب

$$\int_C p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = \iint_R [q_x(x,y) - p_y(x,y)]\,dx\,dy, \qquad (٣)$$

حيث R هى المنطقة المغلقة المحدودة بالكفاف C .

من أجل إيجاد تفسير فيزيائى للدالة المكاملة فى الطرف الأيمن من معادلة (٣) ، دعنا نفترض أن C دائرة نصف قطرها r ومركزها عند النقطة (x_0,y_0) وموجهة فى اتجاه ضد عقرب الساعة . بذلك يمكننا الحصول على سرعة متوسطة على امتداد C وذلك بقسمة الجريان على $2\pi r$ ، ونحصل على السرعة الزاوية المتوسطة المناظرة للسائل حول محور الدائرة بقسمة تلك السرعة المتوسطة على r :

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint_R \frac{1}{2}\,[q_x(x,y) - p_y(x,y)]\,dx\,dy.$$

هذه الصيغة تمثل قيمة متوسطة للدالة

$$\omega(x,y) = \tfrac{1}{2}[q_x(x,y) - p_y(x,y)] \qquad (٤)$$

على النطاق الدائرى المحدود بالكفاف C . نهايتها عندما تؤول r إلى الصفر هى قيمة ω عند النقطة (x_0,y_0) . إذن الدالة $\omega(x,y)$ ، التى تسمى **دوران Rotation** السائل ، تمثل نهاية السرعة الزاوية لعنصر دائرى من السائل عندما تنكمش الدائرة إلى مركزها (النقطة (x,y)) .

إذا كانت $\omega(x,y) = 0$ عند كل نقطة فى نطاق ما ، فإن السريان يقال له سريان لا دورانى **Irrotational** فى هذا النطاق . سنعتبر هنا فقط السريانات اللادورانية ، وسنفترض كذلك أن السائل غير قابل للانضغاط **Incompressible** وأنه عديم اللزوجة **Free from viscosity**

افرض أن D نطاق بسيط الترابط يكون فيه السريان لادورانى . إذا كان C أى كفاف مغلق بسيط فى D ، فإنه ينتج من معادلة (٣) أن الجريان حول C يساوى صفر ، أى أن

$$\int_C p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = 0.$$

وبالتالى ، إذا كانت (x_0,y_0) أى نقطة ثابتة فى D ، فإنه يمكننا تعريف الدالة

$$\phi(x,y) = \int_{(x_0,\,y_0)}^{(x,y)} p(r,t)\,dr + q(r,t)\,dt \qquad (٥)$$

على النطاق D . استخدمنا هنا الرمزين r,t ليرمزا لمتغيرات التكامل وذلك لنفرق بين

متغيرات التكامل والحدود العليا للتكامل . التكامل فى المعادلة (٥) لا يتوقف على المسار المأخوذ بين نقطتى حدى التكامل طالما كان هذا المسار كفافا محتوى فى D . وذلك راجع إلى أن الفرق بين التكاملين المأخوذين على امتداد مسارين مختلفين هو التكامل على امتداد مسار مغلق ، والتكامل الأخير لابد وأن يساوى صفر .

حيث أن التكامل الخطى (٥) لا يتوقف على المسار ، فإن الدالة المكاملة بهذا التكامل تكون المشتقة التامة للدالة $\phi(x,y)$ ، أى أن

$$p(x,y) = \phi_x(x,y), \qquad q(x,y) = \phi_y(x,y). \tag{٦}$$

متجه السرعة $V = p + iq$ هو إذن متجه ميل الدالة ϕ ، والمشتقة الاتجاهية للدالة ϕ فى أى اتجاه تمثل مركبة سرعة السريان فى هذا الاتجاه .

الدالة $\phi(x,y)$ تسمى **جهد السرعة Velocity potential** . من الواضح من معادلة (٥) أن $\phi(x,y)$ تتغير بمقدار ثابت جمعى عندما تتغير نقطة الاسناد (x_0,y_0) . المنحنيات المستوية $\phi(x,y) = c$ تسمى متساويات الجهد **Equipotentials** . حيث أن متجه السرعة **V** هو متجه ميل الدالة $\phi(x,y)$ فإنه ينتج أن **V** يكون عموديا على أى منحنى متساوى الجهد عند أى نقطة لا يكون عندها **V** هو المتجه الصفرى .

تماماً كما فى حالة سريان الحرارة ، الشرط أن السائل غير القابل للانضغاط يدخل إلى أو يخرج من عنصر للحجم فقط بالسريان خلال حدود هذا العنصر يتطلب أن الدالة $\phi(x,y)$ لابد وأن تحقق معادلة لابلاس

$$\phi_{xx}(x,y) + \phi_{yy}(x,y) = 0$$

فى نطاق يكون فيه السائل حرا من المنابع أو المصارف . نظرا لاتصال الدالتين **q,p** ومشتقاتهما الجزئية الأولى ومعادلات (٦) ، فإنه ينتج أن المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة ϕ تكون متصلة فى مثل هذا النطاق . وبالتالى فإن جهد السرعة ϕ يكون **دالة توافقية** فى ذلك النطاق .

٨٨ – دالة التيار The Stream Function

من البند السابق ، يمكن كتابة متجه السرعة

$$V = p(x,y) + iq(x,y) \tag{١}$$

لنطاق بسيط الترابط يكون فيه السريان لادورانى على الصورة

$$V = \phi_x(x,y) + i\phi_y(x,y) \tag{٢}$$

حيث ϕ جهد السرعة .

عندما لا يكون متجه السرعة هو المتجه الصفرى ، فإنه يكون عموديا على منحنى متساوى الجهد مار بالنقطة (x,y) . إذا كان ، بالإضافة إلى ذلك ، $\psi(x,y)$ مرافق توافقى للدالة $\phi(x,y)$ ، فإن متجه السرعة يكون مماسا للمنحنى $\psi(x,y) = c$ المنحنيات $\psi(x,y) = c$ تسمى **خطوط التيار Streamlines** للسريان محل الدراسة ، كما أن الدالة ψ تسمى **دالة التيار Stream function** . فعلى سبيل الخصوص ، الحد الذى لا يستطيع سائل أن يسرى من خلاله يكون خط تيار .

الدالة التحليلية

$$F(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

تسمى **الجهد المركب Complex potential** للسريان . لاحظ أن

$$F'(z) = \phi_x(x,y) + i\psi_x(x,y),$$

أو ، باستخدام معادلتى كوشى – ريمان ،

$$F'(z) = \phi_x(x,y) - i\phi_y(x,y).$$

بهذا تصبح الصيغة (٢) للسرعة

$$V = \overline{F'(z)}.$$

يعطى مقياس السرعة بالصيغة

$$|V| = |F'(z)|.$$

حسب معادلة (٣) بند (٧٨) ، إذا كانت ϕ توافقية فى نطاق بسيط الترابط D ، فإنه يمكن كتابة مرافق توافقى للدالة ϕ هناك على الصورة

$$\psi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} - \phi_t(r,t)\,dr + \phi_r(r,t)\,dt$$

حيث التكامل لا يتوقف على المسار . بمعاونة المعادلات (٦) بند (٧٨) ، يمكننا إذن أن نكتب

$$\psi(x,y) = \int_C - q(r,t)\,dr + p(r,t)\,dt \tag{٤}$$

حيث C أى كفاف فى D من (x_0,y_0) إلى (x,y) .

سبق أن رأينا فى حساب التفاضل والتكامل للمتغيرات الحقيقية أن الطرف الأيمن من معادلة (٤) يمثل التكامل ، بالنسبة لطول القوس σ ، على امتداد C للمركبة العمودية $V_N(x,y)$ للمتجه الذى مركبتيه السينية والصادية هما $p(x,y)$ و $q(x,y)$ على الترتيب. إذن الصيغة (٤) يمكن كتابتها على الصورة

$$\psi(x,y) = \int_C V_N(x,y)\,d\sigma. \tag{٥}$$

فيزيائيا ، الدالة $\psi(x,y)$ تمثل المعدل الزمنى لسريان السائل على امتداد C . وأكثر تحديدا ، الدالة $\psi(x,y)$ ترمز لمعدل السريان ، بالحجم ، خلال سطح ارتفاعه

الوحدة قائما على المنحنى C وعموديا على المستوى xy .

حيث أن ψ و ϕ دالتان توافقيتان فى المستوى xy ، فإن نتائج بندى (٧٩) و (٨٠) يمكن استخدامها . أى أن ، التحويلة

$$z = f(w) = x(u,v) + iy(u,v),$$

حيث f دالة تحليلية ، تحول $\phi(x,y)$ و $\psi(x,y)$ إلى الدالتين التوافقتين v,u على الترتيب . هاتين الدالتين الجديدتين يمكن اعتبارهما على أنهما جهد السرعة ودالة التيار على الترتيب ، لسريان فى المنطقة الجديدة فى المستوى u v .يحول أى خط تيار أو حد طبيعى $\psi(x,y) = c$ فى المستوى xy إلى خط تيار أو حد طبيعى $\psi[x(u,v),y(u,v)] = c$ فى المستوى uv

تحت فروضنا بأن السريان يكون لادورانى ومستقر لسوائل ذات كثافة منتظمة ρ ، فإنه يمكن إثبات أن ضغط السائل $P(x,y)$ يحقق الحالة الخاصة التالية من **معادلة برنولى** **Bernoulli's equation** :

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}|V|^2 = c \qquad (٥)$$

، حيث c ثابت .

لاحظ أن الضغط يكون أكبر ما يمكن عندما يكون مقياس السرعة $|V|$ أقل ما يمكن .

٨٩ - السريان حول زاوية Flow around a Corner

عندما يعطى الجهد المركب بالدالة

$$F(z) = Az \qquad (١)$$

حيث A ثابت حقيقى موجب ، فإن

$$\phi(x,y) = Ax, \qquad \psi(x,y) = Ay. \qquad (٢)$$

خطوط التيار $\psi(x,y) = c$ هى الخطوط الأفقية y=c/A ، وتكون السرعة عند أى نقطة

$$V = \overline{F'(z)} = A.$$

لاحظ هنا أن أى نقطة (x_0,y_0) يكون عندها $\psi(x,y) = 0$ تكون نقطة على محور السينات . إذا أخذت النقطة (x_0,y_0) على أنها نقطة الأصل ، فإن $\psi(x,y)$ تكون معدل السريان خلال أى كفاف مرسوم من نقطة الأصل للنقطة (x,y) (شكل (٨١)) . السريان يكون منتظما وفى اتجاه اليمين . ويمكن النظر إلى هذا السريان على أنه السريان المنتظم فى نصف المستوى العلوى الذى حده محور السينات أو على أنه السريان المنتظم

بين خطين مستقيمين متوازيين $y = y_1$ و $y = y_2$.

لتعيين سريان فى ربع المستوى $u \geqq 0, v \geqq 0$ ، فإنه يجب ملاحظة أن التحويلة

$$z = w^2 \tag{٣}$$

ترسم ربع المستوى فوق النصف العلوى من المستوى xy ، وبحيث ترسم حدود ربع المستوى فوق محور السينات بأكمله . حيث أن $y = 2uv$ ، فإن دالة التيار $\psi(x,y) = Ay$ للسريان فى نصف المستوى تناظر دالة التيار

$$\psi(u,v) = 2Auv \tag{٤}$$

للسريان فى ربع المستوى . وهذه الدالة لابد وأن تكون بالطبع توافقية فى ربع المستوى وتأخذ قيما صفرية على الحدود .

خطوط التيار فى ربع المستوى هى فروع القطاعات الزائدة القائمة (شكل (٨٢))

$$2Auv = c.$$

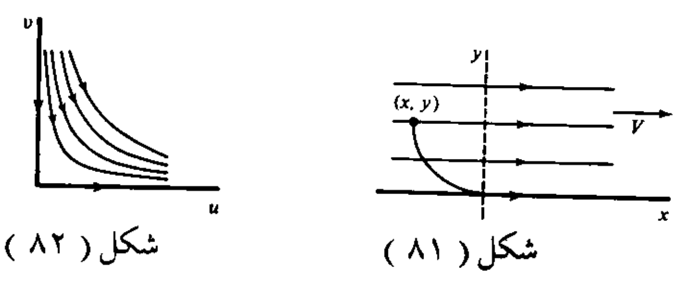
الجهد المركب هو الدالة $F(w) = Aw^2$ وتكون سرعة السائل

$$V = \overline{F'(w)} = 2A(u - iv).$$

مقياس السرعة

$$|V| = 2A\sqrt{u^2 + v^2}$$

يتناسب طرديا مع بعد النقطة المادية عن نقطة الأصل . قيمة دالة التيار (٤) يمكن النظر إليها هنا على أنها معدل السريان خلال قطعة مستقيمة تمتد من نقطة الأصل للنقطة (u,v).فى مثل هذا النوع من المسائل يكون دائماً من الأبسط أن نكتب أولا الجهد المركب كدالة للمتغير المركب فى المنطقة الجديدة . بعد ذلك يمكن الحصول على دالة التيار والسرعة من دالة الجهد .



شكل (٨٢)   شكل (٨١)

الدالة ψ تميز سريانا محددا فى منطقة ما . السؤال عما إذا كان وجود مثل هذه الدالة المناظرة لمنطقة معطاة وجود مفرد ، فيما عدا أن يكون الاختلاف ربما بمعامل ثابت أو ثابت جمعى ، لن يكون محل دراسة هنا . فى بعض الأمثلة التى سترد فيما بعد ، والتى تكون فيها السرعة منتظمة بعيدا عن العائق ، أو كما فى الباب العاشر ، حيث توجد منابع

ومصارف ، فإن الظروف الفيزيائية تشير إلى أن السريان يعين دون نظير بالشروط المعطاة فى المسألة .

ويجب ملاحظة أن مجرد تحديد قيم دالة توافقية على حد منطقة مالا يعنى أنها تعين دائماً دون نظير ، حتى ولو بمعامل ثابت . فعلى سبيل المثال ، رأينا أعلاه أن الدالة $\psi(x,y) = Ay$ تكون توافقية فى نصف المستوى $y > 0$ ولها قيم صفرية على الحدود . الدالة $\psi_1(x,y) = Be^x \sin y$ تحقق أيضاً نفس هذه الشروط . ومع ذلك فإن خط التيار $\psi_1(x,y) = 0$ لا يتكون فقط من الخط $y = 0$ ولكن من الخطوط المستقيمة $y = n\pi$ ، حيث $n = 1, 2, \ldots$ هنا الدالة $F_1(z) = Be^z$ هى الجهد المركب للسريان فى الشريحة بين المستقيمين $y = 0$ و $y = \pi$ ، كلا الحدين اللذان يصنعان خط التيار $\psi_1(x,y) = 0$ ؛ إذا كان $B > 0$ فإن السائل يسرى إلى اليمين على امتداد الحد السفلى وإلى اليسار على امتداد الحد العلوى .

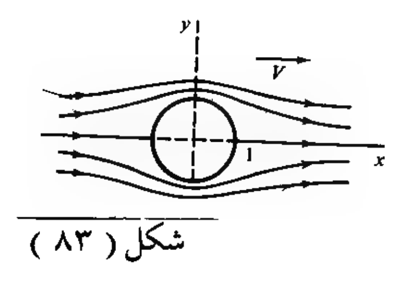
٩٠ – السريان حول اسطوانة Flow around a Cylinder

افترض أن اسطوانة طويلة دائرية نصف قطرها الوحدة وضعت فى جسم كبير من سائل يسرى بسرعة منتظمة ، بحيث يكون محور الاسطوانة عموديا على اتجاه السريان . لتعيين السريان المستقر حول الاسطوانة ، فإننا سنمثل الاسطوانة بالدائرة $x^2 + y^2 = 1$ ونفترض أن السريان بعيدا عنها يكون موازيا لمحور السينات (شكل (٨٣)) . التماثل يوضح أن جزء محور السينات خارج الدائرة يمكن اعتباره كحد ، وبالتالى فإنه يتعين علينا أن نعتبر فقط الجزء العلوى من الشكل على أنه منطقة السريان .

حد هذه المنطقة للسريان ، المكون من النصف العلوى للدائرة وجزئى محور السينات الواقعين خارج الدائرة ، يرسم بالتحويلة

$$w = z + \frac{1}{z}. \qquad (١)$$

فوق محور الاحداثيات u بأكمله .



شكل (٨٣)

المنطقة ترسم فوق نصف المستوى $v \geqq 0$ ، كما هو موضح بشكل (١٧) بملحق (٢) . الجهد المركب لسريان منتظم فى نصف المستوى هذا هو

$$F(w) = Aw,$$

حيث A ثابت حقيقى . إذن الجهد المركب للمنطقة حول الدائرة هو

$$F(z) = A\left(z + \frac{1}{z}\right). \qquad (٢)$$

السرعة

$$V = A\left(1 - \frac{1}{\bar{z}^2}\right) \qquad (٣)$$

تقترب من A كلما زاد $|z|$ ، أى أن السريان يكون منتظمًا تقريبا ويكون موازيا لمحور السينات عند النقط البعيدة عن الدائرة .

من الصيغة (٣) نرى أن $V(\bar{z}) = \overline{V(z)}$ ، وبالتالى فإن هذه الصيغة نفسها تمثل أيضاً سرعات السريان فى المنطقة السفلى حيث يكون النصف السفلى للدائرة خط تيار .

من معادلة (٢) ، نرى أن دالة التيار للمسألة المعطاة تكون بدلالة الاحداثيات القطبية

$$\psi(r,\theta) = A\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta. \qquad (٤)$$

خطوط التيار

$$A\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta = c$$

تكون متماثلة بالنسبة لمحور الصادات وتكون خطوطها التقربية موازية لمحور السينات . لاحظ أنه عندما $c=o$ فإن خط التيار يتكون من الدائرة $r=1$ وجزئى محور السينات بحيث $|x| \geqq 1$

تمـــاريــن

١ – بين لماذا يمكن الحصول على مركبتى السرعة من دالة التيار بالعلاقات

$$p(x,y) = \psi_y(x,y), \qquad q(x,y) = -\psi_x(x,y).$$

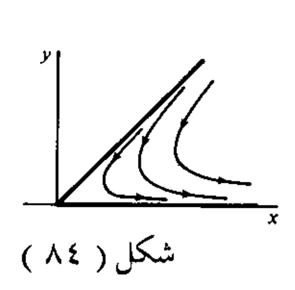
٢ – عند نقطة داخلية من نقاط منطقة سريان فى ظل الشروط التى افترضناها ، لا يمكن أن يكون ضغط السائل أقل من الضغط عند جميع النقط الأخرى فى جوار لتلك النقطة . حقق هذا التقرير باستخدام تقارير بندى (٥٤) و (٨٨) .

٣ – لسريان حول الزاوية الموضحة ببند (٨٩) ، ما هي النقطة فى المنطقة $x \geqq 0, y \geqq 0$ التي يكون عندها ضغط السائل أكبر ما يمكن ؟

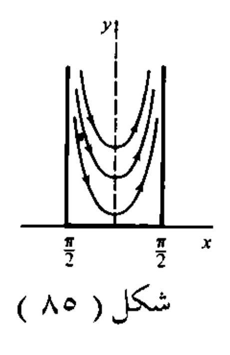
٤ – بين أن مقياس سرعة السائل عند نقط على السطح الاسطوانى ببند (٩٠) يساوى $2|A \sin \theta|$ وأن ضغط السائل على الاسطوانة يكون أكبر ما يمكن عند النقطتين $z = \pm 1$ وأصغر ما يمكن عند النقطتين $z = \pm i$.

٥ – أوجد الجهد المركب للسريان حول اسطوانة $r = r_0$ إذا كانت السرعة V تقترب من ثابت حقيقى A عندما تبتعد النقطة عن الاسطوانة

٦ – أوجد دالة التيار $\psi(r,\theta) = Ar^4 \sin 4\theta$ لسريان فى المنطقة الزاوية $0 \leqq \theta \leqq \pi/4$ (شكل (٨٤)) ، وارسم واحدا أو اثنين من خطوط التيار فى داخل المنطقة .



شكل (٨٤)



شكل (٨٥)

٧ – أوجد الجهد المركب $F(z) = A \sin z$ لسريان داخل المنطقة نصف اللانهائية $-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2$ و $y \geqq 0$ (شكل (٨٥)) . اكتب معادلات خطوط التيار .

٨ – اثبت أنه إذا كان جهد السرعة هو $\phi(r,\theta) = A \operatorname{Log} r \ (A > 0)$ لسريان فى المنطقة $r \geqq r_0$ ، فإن خطوط التيار تكون هي الأشعة $\theta = c$ ، $r \geqq r_0$ ويكون معدل السريان إلى الخارج خلال كل دائرة كاملة حول نقطة الأصل مساويا $2\pi A$ ، مناظرا لمنبع له نفس هذه القوة عند نقطة الأصل .

٩ – أوجد الجهد المركب $F(z) = A(z^2 + z^{-2})$ لسريان فى المنطقة $r \geqq 1$ ، $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$. اكتب صيغتين للدالتين V و ψ .لاحظ كيف يتغير مقياس السرعة $|V|$ على امتداد حدود المنطقة وتحقق من أن $\psi(x,y) = 0$ على الحدود .

١٠ – افرض أن السريان عند بعد لانهائى من الاسطوانة التى نصف قطرها الوحدة ببند (٩٠) يكون منتظما فى اتجاه يصنع زاوية α مع محور السينات ، أى أن

$$\lim_{|z| \to \infty} V = A \exp (i\alpha) \qquad (A > 0).$$

أوجد الجهد المركب

الإجابة : $F(z) = A[z \exp(-i\alpha) + z^{-1} \exp(i\alpha)]$.

١١ – التحويلة $z = w + 1/w$ ترسم الدائرة $|w| = 1$ فوق القطعة المستقيمة التى نقطتا نهايتيها $z = 2$ و $z = -2$ ، وترسم النطاق خارج هذه الدائرة فوق بقية المستوى المركب z . (انظر تمريني (١٨) و (١٩) ببند (٤١)) . اكتب

$$z - 2 = r_1 \exp(i\theta_1), \qquad z + 2 = r_2 \exp(i\theta_2),$$

و

$$(z^2 - 4)^{1/2} = \sqrt{r_1 r_2} \exp \frac{i(\theta_1 + \theta_2)}{2} \qquad (0 \le \theta_1 < 2\pi, 0 \le \theta_2 < 2\pi);$$

بذلك تكون الدالة $(z^2 - 4)^{1/2}$ وحيدة القيمة وتحليلية عند جميع نقط المستوى عدا عند نقط الفرع القاطع المكون من القطعة المستقيمة من محور السينات التى نقطتا نهايتيها $z = \pm 2$ اثبت أن معكوس التحويلة $z = w + 1/w$ ، بحيث $|w| > 1$ لكل نقطة z لا تنتمى للفرع القاطع ، يمكن كتابتها على الصورة

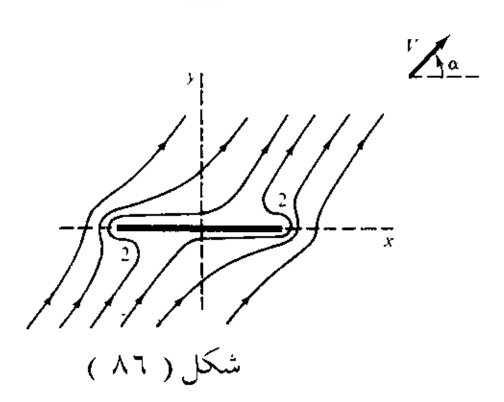
$$w = \frac{1}{2}[z + (z^2 - 4)^{1/2}] = \frac{1}{4}\left(\sqrt{r_1} \exp \frac{i\theta_1}{2} + \sqrt{r_2} \exp \frac{i\theta_2}{2}\right)^2.$$

وبالتالى فإن كل من التحويلة وتحويلتها العكسية تلك تشكل تناظرا أحاديا بين النقط فى النطاقين .

١٢ – بمعاونة النتائج التى حصلنا عليها بتمريني (١٠) و (١١) ، اشتق الصيغة

$$F(z) = A[z \cos\alpha - i(z^2 - 4)^{1/2} \sin\alpha]$$

التى تعين الجهد المركب للسريان المستقر حول صفيحة طويلة عرضها أربعة ومقطعها القطعة المستقيمة التى نقطتا نهايتيها $z = \pm 2$ كما فى شكل (٨٦) ، بفرض أن سرعة السائل عند نقطة على بعد لانهائى من الصفيحة تساوى $A \exp(i\alpha)$، الفرع $(z^2 - 4)^{1/2}$ هو الفرع الذى سبق وصفه بتمرين (١١) و $A > 0$



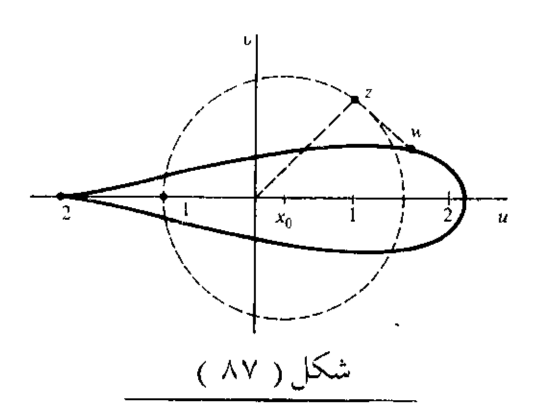
شكل (٨٦)

١٣ اثبت أنه إذا كان $\sin\alpha \neq 0$ بتمرين (١٢) ، فإن مقياس سرعة السائل على امتداد

القطعة المستقيمة التى نقطتا نهايتيها $z = \pm 2$ يكون لا نهائى عند نقطتى النهاية ويساوى $A|\cos\alpha$ عند النقطة المتوسطة .

١٤ من أجل التبسيط ، دع $0 < \alpha \le \pi/2$ بتمرين (١٢) . من ثم اثبت أن سرعة السائل على امتداد الجانب العلوى من القطعة المستقيمة الممثلة للصفيحة بشكل (٨٦) تساوى صفر عند النقطة $x = 2\cos\alpha$ وأن السرعة على امتداد الجانب السفلى من القطعة المستقيمة تساوى صفر عند النقطة $x = -2\cos\alpha$.

١٥ دائرة مركزها عند نقطة x_0 على محور السينات ،حيث $0 < x_0 < 1$ ، ومارة بالنقطة $z=-1$ حولت بالتحويلة $w = z + 1/z$. يمكن أن نرسم هندسيا نقطا غير صفرية مفردة $z = r\exp(i\theta)$ وذلك بإضافة المتجه $r^{-1}\exp(-i\theta)$ للمتجه z . وضح برسم بعض النقط أن صورة الدائرة تكون من نوع البروفيل الموضح بشكل (٨٧) وأن النقط الخارجية للدائرة ترسم فوق النقط الخارجية للبروفيل . هذه حالة خاصة من بروفيل جناح جوكووسكى Joukowski airfoil (انظر أيضاً تمرينى (١٦) ، (١٧) التاليين) .



شكل (٨٧)

١٦ - (أ) اثبت أن راسم الدائرة بتمرين (١٥) يكون حافظا للزوايا الموجهة فيما عدا عند النقطة $z=-1$. (ب) افرض أن الأعداد المركبة

$$\tau = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{|\Delta w|} \quad و \quad t = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{|\Delta z|}$$

تمثل متجهات وحدة مماسة لقوس موجه عند $z=-1$ وصورة ذلك القوس ، على الترتيب ، بالتحويلة $w = z + 1/z$. اثبت أن $\tau = t^2$ ومن ثم اثبت أن بروفيل جوكووسكى المبين بشكل (٨٧) له قرنة cusp (نقطة التقاء قوسين) عند النقطة $w=-2$ وأن الزاوية بين المماسين عند القرنة تساوى صفر .

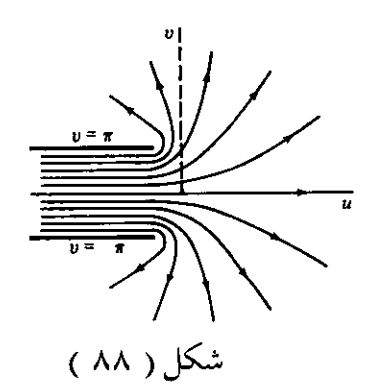
١٧ - معكوس التحويلة $w = z + 1/z$ التى استخدمت بتمرين (١٥) سبق اعطائها ، مع وضع

w,z كل مكان الآخر ، بتمرين (١١) . أوجد الجهد المركب للسريان حول الجناح airfoil الذى قدمناه بتمرين (١٥) عندما تكون السرعة V للسائل على بعد لا نهائى من نقطة الأصل ثابتا حقيقيا A .

١٨ - لاحظ أن التحويلة

$$w = e^z + z$$

ترسم كل من الجزئين الموجب والسالب من الخط المستقيم $y = \pi$ فوق الشعاع $u \leqq -1, v = \pi$. بالمثل الخط المستقيم $y = -\pi$ يرسم فوق الشعاع $v = -\pi$ و $u \leqq -1$ ، وترسم الشريحة $-\pi \leqq y \leqq \pi$ فوق المستوى المركب w . لاحظ أيضاً أن التغير فى الاتجاهات، arg (dw/dz) ، الناتج عن هذه التحويلة يقترب من الصفر عندما تؤول x إلى $-\infty$. اثبت أن خطوط التيار لسائل يسرى خلال القناة المفتوحة المكونة بالشعاعين فى المستوى المركب w (شكل (٨٨)) هى صور الخطوط المستقيمة y = c فى الشريحة . خطوط التيار هذه تمثل أيضاً منحنيات متساوية الجهد لمجال الكهرباء الساكنة بالقرب من حافة مكثف ذى لوحين متوازيين .



شكل (٨٨)

الفصل العاشر

تحويلة شفارتز – كريستوفل

The Schwarz - Christoffel Transformation

سنقوم فى هذا الباب بإيجاد تحويلة ، تعرف بتحويلة شفارتز – كريستوفل ، ترسم محور x والنصف العلوى من المستوى المركب z فوق مضلع مغلق بسيط وداخليته فى المستوى المركب w . وسنعطى كذلك فى هذا الباب تطبيقات هذه التحويلة فى حل مسائل تتعلق بسريان سائل أو مسائل فى نظرية جهد الكهرباء الساكنة .

٩١ – رسم المحور الحقيقى فوق مضلع Mapping the real Axis onto a Polygon

سنمثل متجه الوحدة المماس لقوس أملس موجه C عند نقطة z_0 بالعدد المركب t.

افرض أن القوس Γ هو صورة C بالتحويلة $w=f(z)$ ، أن العدد المركب τ يمثل متجه الوحدة المماس للقوس Γ عند النقطة المناظرة $w_0=f(z_0)$. سنفترض أن f تحليلية عند z_0 وأن $f'(z_0)\neq 0$. طبقا لبند (٧٦) ،

$$\arg \tau = \arg t + \arg f'(z_0). \qquad (١)$$

وبصفة خاصة ، إذا كانت C قطعة مستقيمة من محور x موجهة فى الاتجاه الموجب ، أى إلى اليمين ، فإن $\arg t=0, t=1$ عند كل نقطة $z_0=x$ من نقط C . فى هذه الحالة تؤول المعادلة (١) إلى

$$\arg \tau = \arg f'(x). \qquad (٢)$$

إذا كانت $f'(z)$ ذات سعة ثابتة على امتداد تلك القطعة المستقيمة فينتج أن $\arg \tau$ تكون ثابتة ، أى أن صورة القطعة المستقيمة C تكون أيضاً قطعة مستقيمة Γ من خط مستقيم .

دعنا الآن نوجد تحويلة $w=f(z)$ ترسم المحور x بأكمله فوق مضلع له n من الأضلاع وحيث $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ و $z=\infty$ هى النقط على محور x التى تكون صورها رؤوس المضلع ، حيث

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}.$$

رؤوس المضلع هى النقط $w_j = f(x_j)$ ، حيث $j = 1, 2, \ldots, n-1$ ، $w_n = f(\infty)$. يتعين للدالة f المنشودة أن تكون بحيث أن $\arg f'(z)$ تقفز من قيمة ثابتة ما لقيمة ثابتة أخرى عند النقط $z=x_j$ عندما تتحرك z على المحور x .

إذا اختيرت الدالة f بحيث

$$f'(z) = A(z-x_1)^{-k_1}(z-x_2)^{-k_2}\cdots(z-x_{n-1})^{-k_{n-1}}, \qquad (٣)$$

حيث A عدد مركب ثابت وكل k_j عدد حقيقى ثابت ، فإن سعة $f'(z)$ تتغير تبعا للأسلوب المذكور أعلاه عندما تتحرك z على المحور الحقيقى . ذلك أن سعة الدالة (٣) يمكن كتابتها على الصورة

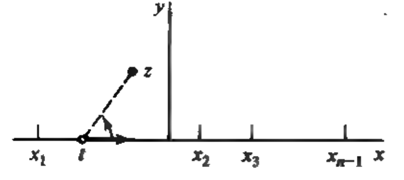
$$\begin{aligned}\arg f'(z) = \arg A - k_1 \arg(z-x_1) \\ - k_2 \arg(z-x_2) - \cdots - k_{n-1} \arg(z-x_{n-1}).\end{aligned} \qquad (٤)$$

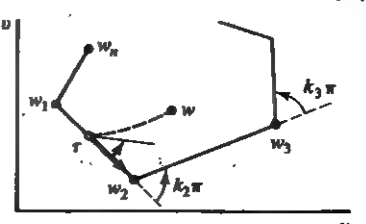
عندما $z=x$ و $x<x_1$:

$$\arg(z-x_1) = \arg(z-x_2) = \cdots = \arg(z-x_{n-1}) = \pi.$$

عندما $x_1 < x < x_2$ فإن $\arg(z-x_1)=0$ وتكون كل من السعات الأخرى مساوية للعدد π . إذن ، طبقا لمعادلة (٤) ، تزداد سعة $f'(z)$ فجائيا بزاوية مقدارها $k_1\pi$ عندما تتحرك z إلى اليمين مارة بالنقطة $z=x_1$. وتقفز قيمتها مرة أخرى بالمقدار $k_2\pi$ عندما تتحرك z مارة بالنقطة x_2 ، إلخ .

طبقا للمعادلة (٢) ، فإن متجه الوحدة τ يكون ثابت الاتجاه عندما تتحرك z من x_{j-1} إلى x_j ، وبالتالى فإن w تتحرك فى هذا الاتجاه الثابت على طول خط مستقيم . ويتغير اتجاه τ فجائيا بالزاوية $k_j\pi$ عند النقطة w_j (صورة النقطة x_j) (شكل (٨٩)) . هذه الزوايا $k_j\pi$ هى الزوايا الخارجية للمضلع الذى يرسم بالنقطة w .





شكل (٨٩)

يمكن أن تحدد الزوايا الخارجية للمضلع لتقع بين $-\pi$ و π ، أى أن $-1 < k_j < 1$ -
سنفترض أن أضلاع المضلع لاتتقاطع مع بعضها على الإطلاق وأن المضلع موجه فى الاتجاه الموجب (أى ضد عقرب الساعة) . بذلك يكون مجموع الزوايا الخارجية لمضلع مغلق يساوى 2π ، وأن الزاوية الخارجية عند الرأس w_n (صورة النقطة $z = \infty$) تحقق العلاقة

$$k_n \pi = 2\pi - (k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1})\pi.$$

إذن الأعداد k_j لابد وأن تحقق الشروط

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} + k_n = 2, \qquad -1 < k_j < 1 \tag{٥}$$

حيث $j = 1, 2, \ldots, n$.

لاحظ أن $k_n = 0$ إذا كان

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = 2. \tag{٦}$$

فى هذه الحالة لايتغير اتجاه τ عند w_n ، وبالتالى لا تكون w_n رأساً للمضلع ، ويكون للمضلع n-1 من الأضلاع .

فيما يلى سنقوم بتبيان تحقق وجود دالة f تعطى مشتقتها بالصيغة (٣) .

٩٢ – تحويلة شفارتز – كريستوفل The Schwarz-Christoffel Transformation

فى الصيغة

$$f'(z) = A(z - x_1)^{-k_1}(z - x_2)^{-k_2} \cdots (z - x_{n-1})^{-k_{n-1}} \tag{١}$$

لمشتقة دالة ترسم محور x فوق مضلع ، افرض أن المعاملات $(z - x_j)^{-k_j}$ تمثل أفرع دوال قوى فروعها القاطعة تمتد تحت هذا المحور . ولكى نكون أكثر تحديدا ، سنكتب

$$(z - x_j)^{-k_j} = |z - x_j|^{-k_j} \exp(-ik_j\theta_j) \tag{٢}$$

حيث $\theta_j = \arg(z - x_j)$ و $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta_j < \frac{3\pi}{2}\right)$ و $j = 1, 2, \ldots, n-1$.بهذا تكون $f'(z)$ تحليلية عند جميع نقط نصف المستوى $y \geqq 0$ عدا عند نقط التفرع x_j (هذه النقط عددها (n-1

إذا كانت z_0 نقطة فى هذا النطاق ، الذى سنرمز له بالرمز R ، الذى تكون فيه الدالة تحليلية ، فإن الدالة

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f'(s)\, ds \tag{٣}$$

تكون وحيدة القيمة وتحليلية فوق نفس النطاق R ، حيث مسار التكامل من z_0 إلى z أى كفاف يقع فى داخلية R . بالإضافة إلى ذلك فإن $F'(z) = f'(z)$.

لتعريف الدالة F عند النقطة $z=x_1$ بحيث تكون متصلة عندها ، نلاحظ أولا أن $(z-x_1)^{-k_1}$ هو العامل الوحيد فى (١) الذى لا يكون تحليليا عند x_1 . وعليه إذا كانت $\phi(z)$ حاصل ضرب بقية العوامل فى (١) ، فإن $\phi(z)$ تكون تحليلية عند x_1 وأنها تمثل عند جميع نقط القرص المفتوح $|z-x_1|<r_1$ بمتسلسلة تايلور حول x_1 . وبالتالى يكون

$$f'(z)=(z-x_1)^{-k_1}\phi(z)$$
$$=(z-x_1)^{-k_1}\left[\phi(x_1)+\phi'(x_1)(z-x_1)+\frac{\phi''(x_1)}{2!}(z-x_1)^2+\cdots\right],$$

أو

$$f'(z)=\phi(x_1)(z-x_1)^{-k_1}+(z-x_1)^{1-k_1}\psi(z) \tag{٤}$$

حيث $\psi(z)$ تحليلية ، وبالتالى متصلة ، عند جميع نقط القرص المفتوح . حيث أن $1-k_1>0$ ، فإن الحد الأخير فى الطرف الأيمن من (٤) يمثل بالتالى دالة متصلة فى المتغير z عند جميع نقط النصف العلوى للقرص المفتوح ، حيث $\operatorname{Im} z \geqq 0$ ، وذلك إذا أخذنا قيمة هذا الحد مساويا للصفر عند $z=x_1$. من هذا ينتج أن التكامل

$$\int_{Z_1}^{z}(s-x_1)^{1-k_1}\psi(s)\,ds$$

للحد الأخير على امتداد كفاف من Z_1 إلى z ، حيث Z_1 والكفاف يقعان فى نصف القرص ، يكون دالة متصلة للمتغير z عند $z=x_1$. التكامل

$$\int_{Z_1}^{z}(s-x_1)^{-k_1}\,ds=\frac{1}{1-k_1}\left[(z-x_1)^{1-k_1}-(Z_1-x_1)^{1-k_1}\right]$$

على امتداد نفس المسار يمثل أيضا دالة متصلة للمتغير z عند x_1 وذلك إذا ما عرفنا قيمة التكامل هناك على أنها نهاية التكامل عندما تقترب z من x_1 فى نصف القرص . وبالتالى فإن تكامل الدالة (٤) على امتداد المسار المذكور من Z_1 إلى z يكون دالة متصلة عند $z=x_1$ ، وهكذا يكون أيضاً التكامل (٣) حيث أنه يمكن كتابته على أنه تكامل على امتداد كفاف فى R من z_0 إلى Z_1 بالإضافة إلى التكامل من Z_1 إلى z .

ماذكر أعلاه يمكن تطبيقه عند كل من النقط x_j ، $j=1,2,\ldots,n-1$ ، وبذلك تصبح F متصلة عند كل نقطة من نقاط المنطقة $y\geqq 0$.

باستخدام المعادلة (١) يمكننا إثبات أنه لعدد موجب R كبير بقدر كاف يوجد عدد ثابت موجب M بحيث أن

$$|f'(z)|<\frac{M}{|z|^{2-k_n}} \quad \text{طالما} \quad |z|>R \tag{٥}$$

وذلك إذا كانت $\operatorname{Im} z\geqq 0$.

حيث أن $1 < k_n - 2$ ،فإن خاصية الترتيب هذه للدالة المكاملة فى المعادلة (٣) تضمن تحقق وجود نهاية للتكامل عندما تؤول z إلى مالانهاية ، أى أنه يوجد عدد w_n بحيث

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = W_n \qquad (\operatorname{Im} z \geqq 0) \qquad (٦)$$

وسنترك تفاصيل إثبات ذلك لتمريني (١٠) ، (١١) من بند (٩٥)

الدالة الراسمة والتى تعطى مشتقتها الأولى بالصيغة (١) يمكن كتابتها على الصورة $f(z) = F(z) + B$ حيث B ثابت مزكب . بذلك تكون التحويلة الناشئة هى

$$w = A \int_{z_0}^{z} (s - x_1)^{-k_1} (s - x_2)^{-k_2} \cdots (s - x_{n-1})^{-k_{n-1}} \, ds + B, \qquad (٧)$$

هذه التحويلة تعرف بتحويلة شفارتز – كريستوفل تكريما للرياضيين الألمانيين هـ. أ شفارتز H.A. Schwarz (١٨٤٣ – ١٩٢١) وإ.ب كريستوفل E.B. Christoffel (١٨٢٩ – ١٩٠٠) والتى اكتشفها كل منهما مستقلا عن الآخر .

التحويلة (٧) متصلة عند جميع نقط نصف المستوى $y \gtrapprox 0$ ، وهى كذلك حافظة للزوايا الموجهة على نفس النطاق عدا عند النقط x_j . ويجب ملاحظة أننا قد افترضنا أن الأعداد k_j تحقق الشروط (٥) من بند (٩١) . بالإضافة إلى ذلك ، فإننا سنفترض أن الثوابت x_j, k_j تكون بحيث لا تتقاطع أضلاع المضلع ، أى أن المضلع يكون كفافا مغلقا بسيطا . وبالتالى ، تبعا لبند (٩١) ، فعندما تتحرك النقطة z على محور السينات فى الاتجاه الموجب فإن صورتها w تتحرك على المضلع [illegible] الموجب كذلك ، وبالتالى يوجد تناظر أحادى بين نقط محور السينات ونقط المضلع P . تبعا للشرط (٦) ، فإن الصورة w_n للنقطة $z = \infty$ يتحقق وجودها وهى $w_n = W_n + B$.

إذا كانت z نقطة داخلية لنصف المستوى العلوى $y \geqq 0$ ، وكانت x_0 أى نقطة مختلفة عن كل من النقط x_j على محور السينات ، فإن الزاوية من المتجه t عند x_0 إلى المتجه الممثل بالقطعة المستقيمة الواصلة بين z, x_0 تكون موجبة وأقل من π (شكل (٨٩)) . عند الصورة w_0 للنقطة x_0 ، الزاوية المناظرة من المتجه τ إلى المتجه الممثل لصورة القطعة المستقيمة الواصلة بين z, x_0 يكون لها نفس القيمة . من هذا ينتج أن صور نقط داخلية نصف المستوى تقع على يسار أضلاع المضلع مأخوذة فى اتجاه ضد عقرب الساعة . سنترك للتمارين إثبات أن هذه التحويلة تناظر أحادى بين النقط الداخلية لنصف المستوى ونقط داخلية المضلع .

إذا أعطينا مضلعا ما P ، دعنا نعين عدد الثوابت فى تحويلة شفارتز–كريستوفل بحيث يرسم محور السينات فوق المضلع P . لهذا الغرض يمكننا كتابة $B = 0,\ A = 1,\ z_0 = 0$ ونتطلب أن يرسم محور السينات فوق مضلع ما P' مشابه للمضلع P، يمكن بعد ذلك

تعديل حجم ووضع المضلع P' ليناسبا حجم ووضع المضلع **P** وذلك باختيار مناسب للثوابت **A,B** .

الأعداد k_j تعين جميعها من الزوايا الخارجية عند رؤوس المضلع **P** . يبقى بعد ذلك أن نختار الثوابت x_j وعددها **n-1** . صورة محور السينات هى مضلع ما P' له نفس زوايا المضلع **P** . ولكن إذا كان من الضرورى أن يتشابه المضلعان P' , P ، فلابد وأن تكون النسبة بين طول أى ضلع من أضلاع المضلع P' ونظيره فى المضلع **P** ثابتة (هذه الأضلاع الموصولة عددها **n-2**) . هذا الشرط يعبر عنه بدلالة **n-3** من المعادلات فى **n-1** من المجاهيل الحقيقية x_j . وبالتالى فإنه يمكن اختيار عددين من الأعداد x_j أو علاقتين بينهما عشوائيا بشرط أن يكون لهذه المعادلات (عددها **n-3**) فى المجاهيل الباقية (وعددها **n-3**) حلولا حقيقية .

عندما تمثل نقطة نهائية $z=x_n$ على محور السينات ، بدلاً من نقطة اللانهاية ، النقطة التى صورتها الرأس w_n فإنه ينتج مماذكرناه فى البند السابق أن تحويلة شفارتز – كريستوفل تأخذ الصورة

$$w = A \int_{z_0}^{z} (s - x_1)^{-k_1}(s - x_2)^{-k_2} \cdots (s - x_n)^{-k_n}\, ds + B \qquad (٨)$$

حيث $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 2$. الأسس k_j تتعين من الزوايا الخارجية للمضلع . ولكن فى هذه الحالة يوجد **n** من الثوابت الحقيقية x_j التى لابد وأن تحقق المعادلات المذكورة أعلاه وعددها **n-3** . وبالتالى فإنه يمكن اختيار ثلاثة أعداد x_j أو ثلاثة شروط على هذه الأعداد عشوائيا فى التحويلة (٨) التى ترسم محور السينات فوق مضلع معطى .

٩٣ – المثلثات والمستطيلات Triangles and Rectangles

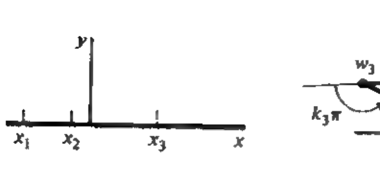
كما رأينا فإنه يعبر عن تحويلة شفارتز – كريستوفل بدلالة النقط x_j وليس بدلالة صورها رؤوس المضلع . مما سبق نعلم كذلك أنه يمكن اختيار ثلاث نقط منها على الأكثر عشوائيا ، وبالتالى فإذا كان للمضلع المعطى أكثر من ثلاثة أضلاع فإنه يتحتم تعيين بعض النقط x_j وذلك للحصول على المضلع المعطى ، أو أى مضلع مشابه له ، كصورة لمحور السينات . واختيار شروط ملائمة لتعيين هذه الثوابت يتطلب عادة مهارة .

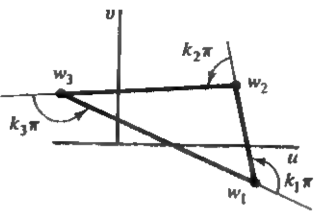
قيد آخر على استخدامنا للتحويلة يرجع إلى التكامل الناشىء . فكثيرا ما يكون هذا التكامل غير ممكن حسابه بدلالة عدد محدود من الدوال الأولية . فى مثل هذه الحالات قد يصبح حل المسائل باستخدام التحويلة من الصعوبة بمكان .

إذا كان المضلع مثلثا رؤوسه عند النقط w_1, w_2, w_3 (شكل (٩٠)) ، فإن التحويلة

المطلوبة يمكن كتابتها على الصورة

$$w = A\int_{z_0}^{z}(s-x_1)^{-k_1}(s-x_2)^{-k_2}(s-x_3)^{-k_3}\,ds + B \qquad (١)$$





شكل (٩٠)

حيث $k_1 + k_2 + k_3 = 2$. والعلاقة بين كل k_j والزاوية الداخلية θ_j هى

$$k_j = 1 - \frac{1}{\pi}\theta_j \qquad (j = 1, 2, 3)$$

وقد اعتبرنا هنا جميع النقط x_j، $j=1, 2, 3$، على أنها نقط نهائية على محور السينات . ويمكن تخصيص قيم اختيارية لكل منها . الثوابت المركبة A,B ، المصاحبة لحجم ووضع المثلث ، يمكن تعيينها بحيث يرسم نصف المستوى العلوى فوق المنطقة المثلثة المعطاة .

إذا أخذنا الرأس w_3 على أنه صورة نقطة اللانهاية ، فإن التحويلة تصبح

$$w = A\int_{z_0}^{z}(s-x_1)^{-k_1}(s-x_2)^{-k_2}\,ds + B, \qquad (٢)$$

حيث يمكن اعطاء قيم حقيقية اختيارية للثابتين x_1, x_2.

التكاملان فى معادلتى (١) ، (٢) لا يمثلان دوالا بسيطة إلا إذا كان المثلث منحلا بحيث يكون رأس أو رأسين من رؤوسه عند اللانهاية . التكامل فى معادلة (٢) يصبح تكاملا ناقصيا عندما يكون المثلث متساوى الأضلاع أو عندما يكون مثلثا قائم الزاوية وإحدى زواياه تساوى $\pi/3$ أو $\pi/4$.

للمثلث المتساوى الأضلاع يكون $k_1 = k_2 = k_3 = 2/3$. لذلك يكون من المناسب كتابة $x_1 = -1$ و $x_2 = 1$ و $x_3 = \infty$ واستخدام معادلة (٢) حيث $A = 1, z_0 = 1$ ، $B = 0$. بذلك تصبح التحويلة

$$w = \int_{1}^{z}(s+1)^{-2/3}(s-1)^{-2/3}\,ds. \qquad (٣)$$

صورة النقطة $z=1$ هى بالطبع $w=0$ ، أى أن $w_2=0$. عندما $z=-1$ فى التكامل ، فإنه يمكننا كتابة $s=x$ ، وبالتالى $-1<x<1$ ، $x+1>0$ ، $\arg(x+1)=0$ ، بينما $|x-1| = 1-x$ ، $\arg(x-1)=\pi$ ، إذن

$$w_1 = \int_{1}^{-1}(x+1)^{-2/3}(1-x)^{-2/3}\exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right)dx \qquad (٤)$$

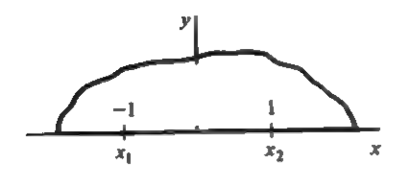
$$= \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right)\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}.$$

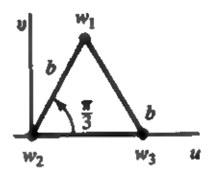
وهذا التكامل الأخير يختزل إلى التكامل المستخدم فى تعريف دالة بيتا (تمرين (٩) بند (٧٥)) . افرض أن b ترمز لقيمة هذا التكامل ، وهى قيمة موجبة :

$$b = 2\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}} = B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}). \qquad (٥)$$

إذن الرأس w_1 هو النقطة (شكل (٩١)) .

$$w_1 = b \exp \frac{\pi i}{3}. \qquad (٦)$$





شكل (٩١)

الرأس w_3 يقع على الجزء الموجب من محور u وذلك لأن

$$w_3 = \int_1^\infty (x+1)^{-2/3}(x-1)^{-2/3}\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{2/3}}.$$

ولكن قيمة w_3 تمثل أيضاً بالتكامل (٣) عندما تؤول z إلى مالا نهاية على امتداد الجزء السالب من محور السينات ، أى أن

$$w_3 = \int_1^{-1} (|x+1|\,|x-1|)^{-2/3} \exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right) dx$$
$$+ \int_{-1}^{-\infty} (|x+1|\,|x-1|)^{-2/3} \exp\left(-\frac{4\pi i}{3}\right) dx.$$

إذن ، على ضوء المعادلة (٤)

$$w_3 = w_1 + \exp\left(-\frac{4\pi i}{3}\right) \int_{-1}^{-\infty} (|x+1|\,|x-1|)^{-2/3}\,dx$$
$$= b \exp\frac{\pi i}{3} + \exp\left(-\frac{\pi i}{3}\right) \int_1^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{2/3}},$$

أو

$$w_3 = b \exp \frac{\pi i}{3} + w_3 \exp\left(-\frac{\pi i}{3}\right).$$

بحل هذه المعادلة الأخيرة للحصول على w_3 نجد أن

$$w_3 = b. \qquad (٧)$$

بهذا نكون قد حققنا أن صورة محور السينات هى المثلث المتساوى الأضلاع الموضح بشكل (٩١) والذى طول ضلعه b . من الممكن كذلك التحقق من أن :

$w = (b/2) \exp(\pi i/3)$ عندما $z = 0$.

عندما يكون المضلع مستطيلا فإن $k_j = 1/2$ لكل j . إذا اخترنا $\pm a$ ، ± 1

تمثل النقط x_j التى صورها رؤوس المستطيل وبكتابة

$$g(z) = (z+a)^{-1/2}(z+1)^{-1/2}(z-1)^{-1/2}(z-a)^{-1/2} \qquad (٨)$$

حيث $0 \leq \arg(z-x_j) \leq \pi$ فإن تحويلة شفارتز – كريستوفل تصبح

$$w = -\int_0^z g(s)\,ds \qquad (٩)$$

وذلك فيما عدا لتحويلة $W = Aw + B$ لتعديل حجم ووضع المستطيل . التكامل (٩) يساوى التكامل الناقصى

$$\int_0^z (1-s^2)^{-1/2}(1-k^2s^2)^{-1/2}\,ds \qquad \left(k = \frac{1}{a}\right);$$

مضروبا فى مقدار ثابت . ولكن الصيغة (٨) للدالة المكاملة توضح بجلاء الأفرع المناسبة للدوال الغير قياسية المعنية .

دعنا نحاول تعيين رؤوس المستطيل عندما $a > 1$. كما هو موضح بشكل (٩٢)، $x_1 = -a$، $x_2 = -1$، $x_3 = 1$ ، $x_4 = a$. جميع الرؤوس الأربعة يمكن التعبير عنها بدلالة عددين موجبين b,c يعتمدان على القيمة a على النحو التالى :

$$b = \int_0^1 |g(x)|\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(a^2-x^2)}}, \qquad (١٠)$$

$$c = \int_1^a |g(x)|\,dx = \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(a^2-x^2)}}. \qquad (١١)$$

عندما $-1 < x < 0$ ، فإن $\arg(x+a) = \arg(x+1) = 0$ و $\arg(x-1) = \arg(x-a) = \pi$ إذن

$$g(x) = [\exp(-\pi i/2)]^2 |g(x)| = -|g(x)|.$$

وعندما $-a < x < -1$ ، فإن $g(x) = [\exp(-\pi i/2)]^3 |g(x)| = i|g(x)|$ ، إذن

$$w_1 = -\int_0^{-a} g(x)\,dx = -\int_0^{-1} g(x)\,dx - \int_{-1}^{-a} g(x)\,dx$$

$$= \int_0^{-1} |g(x)|\,dx - i\int_{-1}^{-a} |g(x)|\,dx = -b + ic.$$

وسيترك للقارىء كتمرين مهمة إثبات أن

$$w_2 = -b, \qquad w_3 = b, \qquad w_4 = b + ic. \qquad (١٢)$$

وبذلك يكون وضع وأبعاد المستطيل كما هو موضح بشكل (٩٢) .

شكل (٩٢)

٩٤ – المضلعات المنحلة Degenerate Polygons

سنقوم الآن بتطبيق تحويلة شفارتز – كريستوفل على بعض المضلعات المنحلة التى تمثل التكاملات بالنسبة لها دوالاً بسيطة . ولتوضيح ذلك ، سنبدأ ببعض التحويلات المألوفة .

أولا ، دعنا نرسم نصف المستوى $y \geqq 0$ فوق الشريحة نصف اللانهائية

$$-\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq \frac{\pi}{2}, \qquad v \geqq 0.$$

سنعتبر الشريحة على أنها الصورة النهائية لمثلث رؤوسه w_1, w_2, w_3 (شكل (٩٣)) عندما يؤول الجزء التخيلى للعدد w_3 إلى مالا نهاية .

القيم النهائية للزوايا الخارجية هى

$$k_1\pi = k_2\pi = \frac{\pi}{2}, \qquad k_3\pi = \pi.$$

نختار النقط $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = \infty$ لتكون النقط التى صورها الرؤوس . وبالتالى فإن مشتقة الدالة الراسمة يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{dw}{dz} = A(z+1)^{-1/2}(z-1)^{-1/2} = A'(1-z^2)^{-1/2}.$$

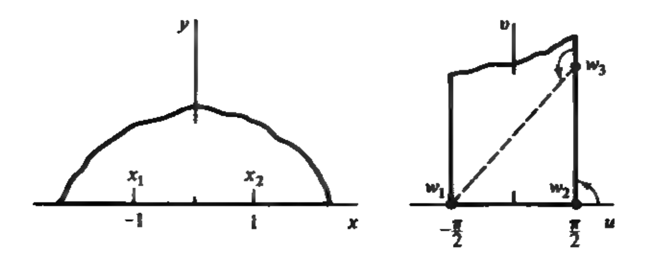
إذن $w = A' \sin^{-1} z + B$. إذا كتبنا $A' = 1/a$ و $B = b/a$ فإن

$$z = \sin(aw - b)$$

هذه التحويلة من المستوى المركب w إلى المستوى المركب z تحقق الشروط $z = -1$ عندما $w = -\pi/2$ و $z = 1$ عندما $w = \pi/2$ وذلك إذا كان $a = 1$ و $b = 0$.
وبالتالى فإن التحويلة الناتجة تكون

$$z = \sin w,$$

التى سبق وأن تحققنا فى بند (٣٩) من أنها ترسم الشريحة فوق نصف المستوى .



شكل (٩٣)

٩٥ – الشريحة اللانهائية The Infinite Strip

اعتبر الشريحة $0 < v < \pi$ على أنها الوضع النهائى لمعين رؤوسه عند النقط $w_1 = \pi i$ و w_2 و $w_3 = 0$, w_4 عندما تتحرك النقطتين w_4, w_2 مسافة لا نهائية إلى اليسار وإلى اليمين على الترتيب (شكل (٩٤)) . فى الوضع النهائى تصبح الزوايا الخارجية

$$k_1\pi = 0, \quad k_2\pi = \pi, \quad k_3\pi = 0, \quad k_4\pi = \pi.$$

سنختار $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = \infty$ وسنترك x_1 لنعينها . مشتقة دالة راسم شفارتز – كريستوفل تصبح

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^0 z^{-1}(z - 1)^0 = \frac{A}{z}$$

وبالتالى فإن

$$w = A \operatorname{Log} z + B.$$

ولكن $B=0$ وذلك حيث أن $w=0$ عندما $z=1$. الثابت A لابد وأن يكون حقيقيا حيث أن النقطة w تقع على احور الحقيقى عندما $z = x$ و $x > 0$. النقطة $w = \pi i$ صورة النقطة $z=x_1$ حيث x_1 عدد سالب . إذن

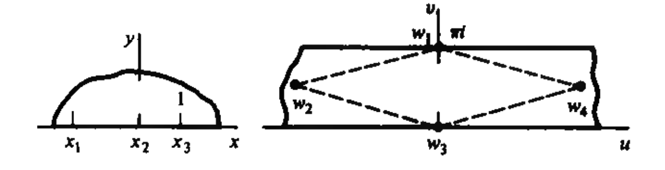
$$\pi i = A \operatorname{Log} x_1 = A \operatorname{Log} |x_1| + A\pi i.$$

بمساواة الأجزاء الحقيقية والتخيلية فى الطرفين نجد أن $|x_1| = 1$ و $A = 1$. وبالتالى فإن التحويلة تصبح

$$w = \operatorname{Log} z$$

كما أن $x_1 = -1$. من بند (٣٨) نعلم أن هذه التحويلة ترسم نصف المستوى فوق الشريحة .

الطريقة التى استخدمت فى هذا البند والبند السابق ليست دقيقة وذلك لأن القيم النهائية للزوايا والاحداثيات لم تقدم بطريقة منهجية . فقد استخدمت القيم النهائية كلما بدا لنا من المناسب أن نفعل ذلك . ولكن إذا فحصنا الراسم الذى حصلنا عليه ، فليس من الضرورى أن نبرر خطوات اشتقاقنا للدالة الراسمة . الطريقة الشكلية التى استخدمت هنا أقصر وأقل صعوبة من الطرق الدقيقة .



شكل (٩٤)

تمـــاريـــن

١ - فى التحويلة (١) بند (٩٣) ضع $B = z_0 = 0$ و

$$A = \exp \frac{3\pi i}{4}, \qquad x_1 = -1, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 1,$$

$$k_1 = \tfrac{3}{4}, \qquad k_2 = \tfrac{1}{2}, \qquad k_3 = \tfrac{3}{4}$$

وذلك لرسم محور السينات فوق مثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين . اثبت أن رؤوس هذا المثلث هى النقط

$$w_1 = bi, \qquad w_2 = 0, \qquad w_3 = b,$$

حيث b الثابت الموجب :

$$b = \int_0^1 (1 - x^2)^{-3/4} x^{-1/2}\, dx.$$

كذلك اثبت أن $2b = B(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4})$ حيث B هى دالة بيتا .

٢ - استنتج الصيغ (١٢) فى بند (٩٣) لبقية رؤوس المستطيل الموضح بشكل (٩٢) .

٣ - اثبت أنه عندما $0 < a < 1$ فى صيغتى (٨) ، (٩) ببند (٩٣) فإن رؤوس المستطيل تكون كما هو موضح بشكل (٩٢) حيث b,c تأخذ الآن القيم

$$b = \int_0^a |g(x)|\, dx, \qquad c = \int_a^1 |g(x)|\, dx.$$

٤ - اثبت أن الحالة الخاصة

$$w = i \int_0^z (s+1)^{-1/2} (s-1)^{-1/2} s^{-1/2}\, ds$$

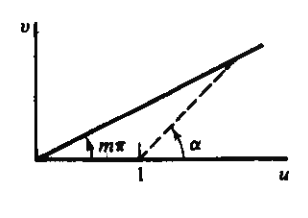
من تحويلة شفارتز - كريستوفل (٧) ببند (٩٢) ترسم محور السينات فوق المربع الذى رؤوسه

$$w_1 = bi, \qquad w_2 = 0, \qquad w_3 = b, \qquad w_4 = b + ib$$

حيث العدد الموجب b يعطى بدلالة دالة بيتا كالتالى :

$$b = \tfrac{1}{2} B(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2})$$

٥ - استخدم تحويلة شفارتز–كريستوفل للحصول على التحويلة $w = z^m$ ، حيث $0 < m < 1$ التى ترسم نصف المستوى $y \geq 0$ فوق المنطقة الزاوية $0 \leq \arg w \leq m\pi$ والنقطة $z = 1$ فوق النقطة $w = 1$. اعتبر المنطقة الزاوية على أنها الصورة النهائية للمثلث الموضح بشكل (٩٥) عندما تؤول الزاوية α إلى الصفر.



شكل (٩٥)

٦ - انظر شكل (٢٦) بملحق (٢) . عندما تتحرك النقطة z إلى اليمين على امتداد الجزء السالب من المحور الحقيقى تتحرك صورتها w إلى اليمين على امتداد محور u بأكمله . عندما تقطع z القطعة المستقيمة $0 \leqq x \leqq 1, y = 0$ على المحور الحقيقى الموجب تتحرك صورتها w إلى اليسار على امتداد الشعاع $u \geqq 1, v = \pi i$ وعندما تتحرك z إلى اليمين على جزء المحور الحقيقى الموجب بحيث $x \geqq 1$ تتحرك صورتها w إلى اليمين على امتداد نفس الشعاع $u \geqq 1, v = \pi i$.
لاحظ التغير فى اتجاه حركة النقطة w عند صورتى النقطتين $z = 1, z = o$. هذه التغيرات تجعلنا نختار مشتقة الدالة الراسمة لتكون

$$f'(z) = k(z - 0)^{-1}(z - 1)$$

حيث k ثابت ما ، وبالتالى نحصل على الدالة الراسمة

$$w = \pi i + z - \operatorname{Log} z$$

ويمكن التحقق من أن هذا الراسم يرسم نصف المستوى $\operatorname{Re} z > 0$ كما هو موضح بالشكل .

٧ - عندما تتحرك النقطة z إلى اليمين على امتداد جزء المحور الحقيقى السالب بحيث $x \leqq -1$ تتحرك صورتها إلى اليمين على امتداد المحور الحقيقى السالب فى المستوى المركب w .
وعندما تتحرك z إلى اليمين على امتداد القطعة المستقيمة $-1 \leqq x \leqq 0, y = 0$ من المحور الحقيقى ثم تتحرك على امتداد القطعة المستقيمة $0 \leqq x \leqq 1, y = 0$ تتحرك صورتها w فى اتجاه زيادة v على امتداد القطعة المستقيمة $u = 0, 0 \leqq v \leqq 1$ ثم فى اتجاه تناقص v على امتداد نفس القطعة المستقيمة . وأخيرا ، عندما تتحرك z إلى اليمين على امتداد جزء المحور الحقيقى الموجب بحيث $x \geqq 1$ تتحرك صورتها إلى اليمين على امتداد المحور الحقيقى الموجب فى المستوى المركب w . لاحظ التغيرات فى اتجاه حركة w عند صور النقط $z = -1$ ، $z = 0, z = 1$. من هذا نحصل على دالة راسمة مشتقتها :

$$f'(z) = k(z + 1)^{-1/2}(z - 0)^{1}(z - 1)^{-1/2},$$

حيث k ثابت ما . أوجد الدالة الراسمة

$$w = \sqrt{z^2 - 1}$$

حيث $0 < \arg \sqrt{z^2 - 1} < \pi$.باستخدام الرواسم المتعاقبة $Z = z^2$, $W = Z - 1$ ، $w = \sqrt{W}$ تحقق من أن التحويلة المحصلة ترسم نصف المستوى $\operatorname{Re} z > 0$ فوق نصف المستوى $\operatorname{Im} w > 0$ مع قطع على امتداد القطعة المستقيمة $u = 0, 0 < v \leqq 1$

٨ - معكوسة التحويلة الخطية الكسرية

$$Z = \frac{i - z}{i + z}$$

ترسم القرص $|Z| \leqq 1$ ، بحيث تكون حافظة للزوايا الموجهة وذلك عدا عند النقطة $Z = -1$ ، فوق نصف المستوى $\operatorname{Im} z \geqq 0$. (أنظر شكل (١٧) ملحق (٢)) . افرض أن Z_j نقط على الدائرة $|Z| = 1$ صورها النقط $z = x_j\ (j = 1, 2, \ldots, n)$ ، والتى استخدمت

فى تحويلة شفارتز – كريستوفل (٨) بند (٩٢) . بين دون تعيين أفرع الدوال الغير القياسية – أن

$$\frac{dw}{dZ} \quad A'(Z-Z_1)^{-k_1}(Z-Z_2)^{-k_2}\cdots(Z-Z_n)^{-k_n}$$

حيث A' ثابت ما . ومن ثم بين أن التحويلة

$$w = A'\int_0^z (S-Z_1)^{-k_1}(S-Z_2)^{-k_2}\cdots(S-Z_n)^{-k_n}\,dS + B$$

ترسم داخلية الدائرة $|Z| = 1$ فوق داخلية مضلع رؤوسه صور النقط Z_j الواقعة على الدائرة .

٩ – فى التكامل بتمرين (٨) ، افرض أن الأعداد $Z_j\ (j = 1, 2, \ldots, n)$ ، هى الجذور النونية للوحدة . اكتب $\omega = \exp(2\pi i/n),\ Z_1 = 1,\ Z_2 = \omega, \ldots, Z_n = \omega^{n-1}$ افرض كذلك أن كل من الأعداد $k_j\ (j = 1, 2, \ldots, n)$ يساوى $2/n$ بهذا يصبح التكامل بتمرين (٨)

$$w = A'\int_0^z \frac{dS}{(S^n-1)^{2/n}} + B.$$

اثبت أنه عندما تكون $A' = 1$ ، $B = 0,$ فإن هذه التحويلة ترسم داخلية دائرة الوحدة $|Z| = 1$ فوق داخلية مضلع منتظم عدد أضلاعه n ومركزه النقطة w = o .

اقتراح : صورة كل من النقط $Z_j\ (j = 1, 2, \ldots, n)$ هى رأس مضلع ما زاويته الخارجية عند هذا الرأس تساوى $2\pi/n$. اكتب

$$w_1 = \int_0^1 \frac{dS}{(S^n-1)^{2/n}}$$

متخذا مسارالتكامل ليكون على امتداد المحور الحقيقى الموجب من Z = o إلى Z = 1 مع ملاحظة أننا سنأخذ القيمة الأساسية للجذر النونى للمقدار $(S^n-1)^2$.من ثم اثبت أن صور النقط $Z_2 = \omega, \ldots, Z_n = \omega^{n-1}$ هى النقط $\omega w_1, \ldots, \omega^{n-1}w_1$ على الترتيب . بعد ذلك تحقق من أن المضلع يكون منتظما ومركزه w = o .

١٠ – احصل على متباينة (٥) بند (٩٢) .

اقتراح : افرض أن R أكبر من أى من الأعداد $|x_j|\ (j = 1, 2, \ldots, n-1)$ لاحظ أنه إذا كانت R كبيرة كبرا كافيا فإن المتباينات $|z|/2 < |z - x_j| < 2|z|$ تتحقق لكل x_j عندما $|z| > R$. ثم استخدم معادلة (١) بند (٩٢) مع الشروط (٥) بند (٩١) .

١١ – فى بند (٩٢) ، استخدم الشروط (٥) والشروط الكافية لتحقق وجود تكاملات معتلة للدوال الحقيقية لإثبات أن F(x) لها نهاية ما w_n عندما تؤول x إلى مالا نهاية ، حيث F(z) معرفة بمعادلة (٣) من ذلك البند . اثبت كذلك أن تكامل الدالة $f'(z)$ فوق كل قوس من نصف الدائرة $|z| = R,\ \text{Im}\, z \geqq 0$ يقترب من الصفر عندما تؤول R

إلى ∞ . ومن ثم استنتج أن

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = W_n \qquad\qquad (\operatorname{Im} z \geqq 0),$$

كما هو مذكور بمعادلة (٦) هناك .

١٢ طبقا لتمرين (١٤) بند (٧١) يمكن استخدام الصيغة

$$N \quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz$$

لتعيين عدد أصفار دالة g بداخلية كفاف بسيط مغلق C موجه فى الاتجاه الموجب عندما يقع C فى نطاق بسيط الترابط D تكون فيه $g(z)$ تحليلية ولا تنعدم $g'(z)$ فيه على الإطلاق . فى تلك الصيغة اكتب $g(z) = f(z) - w_0$ ، حيث $f(z)$ الدالة الراسمة لتحويلة شفارتز كريستوفل (٧) بند (٩٢) ، والنقطة w_0 إما أن تكون نقطة داخلية أو خارجية للمضلع P الذى يكون صورة لمحور x ، إذن $f(x) \neq w_0$. افرض أن الكفاف C يتكون من النصف العلوى لدائرة $|z| = R$ وقطعة مستقيمة $-R < x < R$ من محور x تحوى جميع النقط x_j ، $j = 1, 2, \ldots, n-1$ فيما عدا قطعة مستقيمة صغيرة حول كل نقطة x_j تستبدل بالنصف العلوى من دائرة $|z - x_j| = r_j$ قطرها تلك القطعة المستقيمة . إذن عدد النقط z الداخلية للكفاف C بحيث $f(z) = w_0$ هو

$$N_C = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}\,dz.$$

لاحظ أن $f(z) - w_0$ تقترب من النقطة الغير صفرية $W_n - w_0$ عندما $|z| = R$ وعندما تؤول R إلى ∞ ، متذكرا فى ذلك خاصية الترتيب (٥) بند (٩٢) للدالة $|f'(z)|$. افرض أن الأعداد r_j تؤول إلى الصفر واثبت أن عدد النقط فى النصف العلوى من المستوى المركب z التى يكون عندها $f(z) = w_0$ يكون

$$N = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{f'(x)}{f(x) - w_0}\,dx.$$

استنتج أن $N = 1$ إذا كانت w_0 نقطة داخلية للمضلع P وأن $N = 0$ إذا كانت w_0 نقطة خارجية للمضلع P ، وذلك حيث أن

$$\int_P \frac{dw}{w - w_0} = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{f'(x)}{f(x) - w_0}\,dx,$$

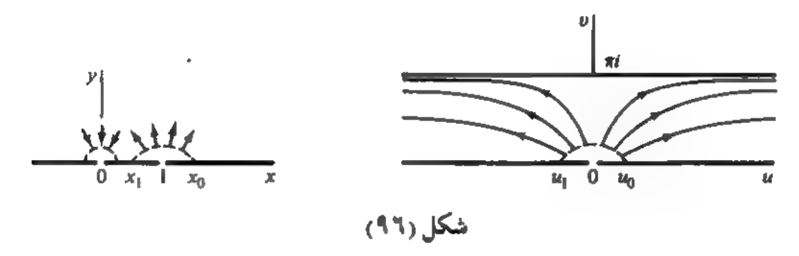
ومن ثم اثبت أن الراسم لنصف المستوى $\operatorname{Im} z > 0$ فوق داخلية P يكون أحاديا .

٩٦ - سريان سائل فى مجرى من خلال شق Fluid Flow in a Channel through a Slit

سنقدم الآن مثالا آخر عن السريان المستقر المثالى الذى سبق لنا التعرض له فى الباب

التاسع . هذا المثال سيساعدنا فى أن نبين كيف أن المنابع والمصارف يمكن أن توضح فى مسائل سريان سائل .

اعتبر السريان المستقر الثنائى البعد لسائل بين مستويين متوازيين $v = 0$, $v = \pi$ إذا كان السائل يتدفق من خلال شق ضيق بطول الخط المستقيم فى المستوى الأول والذى يكون عموديا على المستوى uv عند نقطة الأصل (شكل (٩٦)) . افرض أن معدل سريان السائل فى المجرى من خلال الشق يساوى Q من وحدات الحجم لوحدة الزمن لكل وحدة من وحدات عمق المجرى ، حيث العمق مقيس فى الاتجاه العمودى للمستوى uv . بذلك يكون معدل السريان إلى الخارج عند كل من النهايتين يساوى $Q/2$.



شكل (٩٦)

التحويلة $w = \text{Log } z$ ، التى سبق اشتقاقها فى البند السابق ، راسم أحادى من النصف العلوى للمستوى المركب z فوق الشريحة فى المستوى المركب w . التحويلة العكسية

$$z = e^w = e^u e^{iv} \qquad (١)$$

ترسم إذن الشريحة فوق نصف المستوى . التحويلة (١) ترسم محور الإحداثيات u فوق النصف الموجب من محور الاحداثيات x ، وترسم الخط المستقيم $v = \pi$ فوق النصف السالب من نفس المحور . بذلك يكون حد الشريحة قد رسم فوق حد نصف المستوى .

النقطة $z = 1$ هى صورة النقطة $w = 0$. صورة نقطة ما $w = u_0$ ، حيث $u_0 > 0$ ، هى نقطة $z = x_0$ حيث $x_0 > 1$. معدل سريان السائل على امتداد منحنى يصل النقطة $w = u_0$ بنقطة (u,v) فى الشريحة هو دالة تيار $\psi(u,v)$ للسريان (بند (٨٨)). إذا كان u_1 عددًا حقيقيا سالبا ، فإن معدل السريان فى المجرى من خلال الشق يمكن كتابته على الصورة

$$\psi(u_1, 0) = Q.$$

الآن ، فبتأثير تحويلة حافظة للزوايا الموجهة ، تحول الدالة ψ إلى دالة فى المتغيرين x,y تمثل دالة تيار للسريان فى المنطقة المناظرة من المستوى المركب z ، أى أن معدل السريان

متساو على امتداد منحنيات متناظرة فى المستويين . كما اتبعنا فى الباب التاسع ، سنستخدم نفس الرمز ψ ليرمز لدالتى التيار المختلفتين فى المستويين . وحيث أن صورة النقطة $w = u_1$ تكون نقطة $z = x_1$ حيث $0 < x_1 < 1$، فإن معدل السريان على امتداد أى منحنى يصل النقطتين $z = x_1, z = x_0$ ويقع فى النصف العلوى من المستوى المركب z يساوى أيضا Q . وبالتالى فإنه يوجد منبع عند النقطة $z = 1$ مساو للمنبع عند $w = o$.

ما أتبع أعلاه يمكن استخدامه بصفة عامة لإثبات أن : **تحت تأثير تحويلة حافظة للزوايا الموجهة فإن كل منبع أو مصرف عند نقطة معطاة يناظر منبع أو مصرف مساو له عند صورة تلك النقطة .**

عندما يؤول $\text{Re } w$ إلى $-\infty$ ، تقترب صورة النقطة w من النقطة $z = o$. وأى مصرف قوته $Q/2$ عند النقطة الأخيرة يناظر المصرف الذى يبعد بعدا لانهائيا إلى اليسار فى الشريحة . لتطبيق ماذكر أعلاه فى هذه الحالة ، نعتبر معدل السريان على امتداد منحنى يصل الحدين $v = 0$ و $v = \pi$ للجزء الأيسر من الشريحة وكذلك السريان على امتداد صورة هذا المنحنى فى المستوى المركب z .

المصرف عند نهاية الطرف الأيمن للشريحة يحول إلى مصرف عند نقطة اللانهاية فى المستوى المركب z .

دالة التيار ψ للسريان فى النصف العلوى من المستوى المركب z لابد وأن تكون فى هذه الحالة دالة ذات قيم ثابتة على امتداد كل جزء من الأجزاء الثلاثة من محور السينات . بالإضافة إلى ذلك فإن قيمتها لابد وأن تزيد بمقدار Q عندما تتحرك النقطة z حول النقطة $z = 1$ من الموضع $z = x_0$ للموضع $z = x_1$ ، ولابد أن تنقص قيمتها بمقدار $Q/2$ عندما تتحرك z حول نقطة الأصل بطريقة مناظرة. الدالة

$$\psi(x,y) = \frac{Q}{\pi}\left[\text{Arg}\,(z-1) - \tfrac{1}{2}\,\text{Arg}\,z\right]$$

تحقق هذه المتطلبات . بالاضافة إلى ذلك ، فهذه الدالة توافقية فى نصف المستوى $\text{Im } z > 0$ وذلك لأنها الجزء التخيلى من الدالة

$$F(z) = \frac{Q}{\pi}\left[\text{Log}\,(z-1) - \tfrac{1}{2}\,\text{Log}\,z\right]$$

$$= \frac{Q}{\pi}\,\text{Log}\,(z^{1/2} - z^{-1/2}).$$

الدالة F دالة جهد مركب للسريان فى النصف العلوى من المستوى المركب z . وحيث أن $z = e^w$ ، فإن الدالة

$$F(w) = \frac{Q}{\pi}\,\text{Log}\,(e^{w/2} - e^{-w/2})$$

تكون دالة جهد مركب للسريان فى المجرى .
بإهمال ثابت جمعى ، يمكننا كتابة

$$F(w) = \frac{Q}{\pi} \operatorname{Log}\left(\sinh \frac{w}{2}\right). \qquad (٢)$$

لاحظ أننا استخدمنا نفس الرمز F للدلالة على ثلاث دوال مختلفة ، مرة فى المستوى المركب z ومرتان فى المستوى المركب w .

متجه السرعة $\overline{F'(w)}$ يعطى بالعلاقة

$$V = \frac{Q}{2\pi} \coth \frac{\overline{w}}{2}. \qquad (٣)$$

من هذا نرى أن

$$\lim_{|u| \to \infty} V = \frac{Q}{2\pi}.$$

كذلك ، النقطة $w = \pi i$ **نقطة ركود Stagnation point** ، أى أن السرعة عندها تساوى صفر . وبالتالى فإن ضغط السائل على امتداد الحائط $v = \pi$ للمحرى يكون أكبر ما يمكن عند النقط المقابلة للشق .

دالة التيار $\psi(u,v)$ للمجرى هى الجزء التخيلى للدالة F(w) المعطاة بالمعادلة (٢) .
وبذلك تكون خطوط السريان Streamlines هى المنحنيات $\psi(u,v) = c$

$$\frac{Q}{\pi} \operatorname{Arg}\left(\sinh \frac{w}{2}\right) = c.$$

وهذه المعادلة تؤول إلى

$$\tan \frac{v}{2} = k \tanh \frac{u}{2} \qquad (٤)$$

حيث k ثابت حقيقى . شكل (٩٦) يوضح بعض خطوط السريان .

٩٧ السريان فى مجرى ذى نتوء Flow in a Channel with an Offset

لزيادة إيضاح استخدام تحويلة شفارتز - كريستوفل ، دعنا نوجد الجهد المركب لسريان سائل فى مجرى به تغير فجائى فى العرض (شكل (٩٧)) . سنعتبر وحدة للطول بحيث يكون عرض الجزء الأكبر عرضا من المجرى يساوى π من الوحدات ، وبالتالى فإن عرض الجزء الأضيق من المجرى يساوى $h\pi$ ، حيث $0 < h < 1$.

افرض أن الثابت الحقيقى V_0 يرمز لسرعة السائل بعيدا عن النتوء فى الجزء الأكبر عرضا ، أى أن

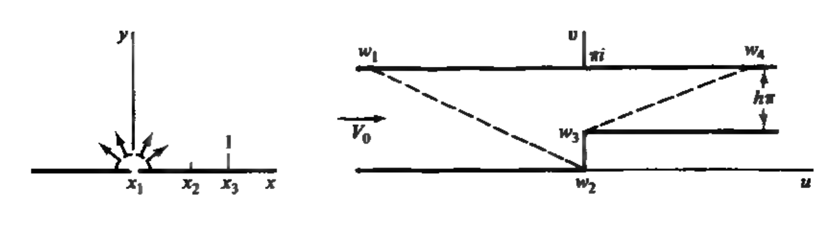
$$\lim_{u \to -\infty} V = V_0$$

حيث المتغير المركب V يمثل متجه السرعة . معدل السريان لوحدة العمق خلال المجرى ، أو قوة المنبع على اليسار وقوة المصرف على اليمين ، يكون إذن

$$Q = \pi V_0. \tag{١}$$

يمكن اعتبار مقطع المجرى على أنه الوضع النهائى للشكل الرباعى الموضح بالشكل والذى رؤوسه النقط w_1, w_2, w_3, w_4 ، عندما يتحرك الرأس w_1 إلى اليسار مسافة لا نهائية ويتحرك الرأس w_4 إلى اليمين مسافة لا نهائية كذلك . فى الوضع النهائى تصبح الزوايا الخارجية

$$k_1\pi = \pi, \qquad k_2\pi = \frac{\pi}{2}, \qquad k_3\pi = -\frac{\pi}{2}, \qquad k_4\pi = \pi.$$



شكل (٩٧)

إذا كتبنا $x_1 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = \infty$ وتركنا x_2 لنعينها ، حيث $0 < x_2 < 1$ ، فإن مشتقة الدالة الراسمة تصبح

$$\frac{dw}{dz} = Az^{-1}(z - x_2)^{-1/2}(z - 1)^{1/2}. \tag{٢}$$

من أجل تبسيط تعيين الثوابت A و x_2 هنا ، سنشرع مباشرة فى استخدام الجهد المركب للسريان . منبع السريان فى المجرى والواقع إلى أقصى اليسار يناظر منبعا مساويا عند $z = 0$ (بند (٩٦)) . الحد الكامل لمقطع المجرى هو صورة محور السينات . ووفقا لمعادلة (١) ، فإن الدالة

$$F(z) = V_0 \operatorname{Log} z = V_0 \operatorname{Log} r + iV_0\theta \tag{٣}$$

تكون دالة الجهد للسريان فى النصف العلوى من المستوى المركب z مع وجود المنبع المطلوب عند نقطة الأصل . لاحظ أن المصرف على يمين المجرى لابد وأن يناظر مصرفا عند نقطة اللانهاية فى المستوى المركب z .

المرافق المركب للسرعة V فى المستوى المركب w يمكن كتابته على الصورة

$$\overline{V(w)} = \frac{dF}{dw} = \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dw}.$$

وبالتالى ، فباستخدام معادلتى (٢) ، (٣) ، يمكننا أن نكتب

$$\overline{V(w)} = \frac{V_0}{A}\left(\frac{z - x_2}{z - 1}\right)^{1/2}. \tag{٤}$$

فى الوضع النهائى للنقطة w_1 والمناظر للنقطة $z = 0$ ، تكون السرعة هى الثابت

الحقيقى V_0. بذلك ينتج من معادلة (٤) أن

$$V_0 = \frac{V_0}{A}\sqrt{x_2}.$$

عند الوضع النهائى للنقطة w_4 والمناظر للنقطة $z=\infty$ ، سنرمز للسرعة بالعدد الحقيقى V_4 . قد يبدو لنا الآن ظاهريا ، أنه عندما تتحرك قطعة مستقيمة رأسية للتعبر الجزء الصيق من المجرى مسافة لا نهائية إلى اليمين ، فإن V تقترب من V_4 عند كل نقطة من نقط تلك القطعة المستقيمة . يمكننا التحقق من أن هذا التخمين **Conjecture** حقيقة واقعة وذلك بإيجاد w كدالة فى z أولا من معادلة (٢) ، ولكن ، حتى نوجز المناقشة ، سنفترض صحة هذه الحقيقة . إذن ، وحيث أن السريان مستقر فإن

$$\pi h V_4 = \pi V_0 = Q,$$

أى أن $V_4 = V_0/h$. بجعل z تؤول إلى ما لانهاية فى معادلة (٤) ، نجد أن

$$\frac{V_0}{h} = \frac{V_0}{A}.$$

إذن

$$A = h, \qquad x_2 = h^2, \tag{٥}$$

و

$$\overline{V(w)} = \frac{V_0}{h}\left(\frac{z-h^2}{z-1}\right)^{1/2}. \tag{٦}$$

من معادلة (٦) يمكننا أن نرى أن مقياس السرعة $|V|$ يصبح لا نهائيا عند الحافة w_3 للنتوء وذلك حيث أنه صورة النقطة $z=1$. أيضاً ، الحافة w_2 نقطة ركود ، وهى نقطة تحقق $v=0$. بذلك يكون ضغط السائل على امتداد حد المجرى أكبر ما يمكن عند w_2 وأصغر ما يمكن عند w_3 .

لإيجاد العلاقة بين الجهد والمتغير w ، لابد أن نكامل معادلة (٢) التى يمكن كتابتها الآن على الصورة

$$\frac{dw}{dz} = \frac{h}{z}\left(\frac{z-1}{z-h^2}\right)^{1/2}. \tag{٧}$$

بالتعويض بمتغير جديد s ، حيث

$$\frac{z-h^2}{z-1} = s^2,$$

يمكننا أن نبين أن معادلة (٧) تؤول إلى

$$\frac{dw}{ds} = 2h\left(\frac{1}{1-s^2} - \frac{1}{h^2-s^2}\right).$$

إذن ،

$$w = h \operatorname{Log}\frac{1+s}{1-s} - \operatorname{Log}\frac{h+s}{h-s}. \tag{٨}$$

ثابت التكامل هنا يساوى صفراً وذلك لأن $s=0$ ، ومن ثم $w=0$ ، عندما $z=h^2$

بدلالة s ، يصبح الجهد F المعطى بمعادلة (٣)

$$F = V_0 \operatorname{Log} \frac{h^2 - s^2}{1 - s^2};$$

وبالتالى فإن

$$s^2 = \frac{\exp(F/V_0) - h^2}{\exp(F/V_0) - 1}. \quad (٩)$$

بالتعويض عن s كما هى معطاة بهذه المعادلة فى معادلة (٨) ، نحصل على علاقة ضمنية تعطى الجهد F كدالة للمتغير المركب w .

٩٨ – جهد الكهرباء الساكنة حول حافة صفيحة موصلة

Electrostatic Potential about an Edge of a Conducting Plate

ليكن لدينا صفيحتان موصلتان متوازيتان ممتدتان لا نهائيا حفظ جهد الكهرباء الساكنة لهما عند V = o وصفيحة ثالثة نصف لا نهائية موازية لهما وموضوعة فى وسط المسافة بينهما حفظ جهد الكهرباء الساكنة لها عند V = 1 . سنختار نظاما للاحداثيات ووحدة للطول بحيث تقع الصفائح الثلاث فى المستويات $v = 0$, $v = \pi$, $v = \pi/2$ (شكل (٩٨)) . دعنا نعين دالة الجهد V(u,v) فى المنطقة الواقعة بين هذه الصفائح . مقطع هذه المنطقة فى المستوى uv فى صورته النهائية يكون الشكل الرباعى المحدد بالمستقيمات المنكسرة الموضحة بالشكل ، وذلك عندما تتحرك النقطتان w_1, w_3 إلى الخارج يمينا وتتحرك النقطة w_4 إلى الخارج يسارا . بتطبيق تحويلة شفارتز كريستوفل هنا ، سنفترض أن النقطة x_4 ، المناظرة للرأس w_4 هى نقطة اللانهاية . سنختار $x_1 = -1, x_3 = 1$ وندع x_2 كنقطة مطلوب تعيينها . القيم النهائية للزوايا الخارجية للشكل الرباعى هى

$$k_1\pi = \pi, \qquad k_2\pi = -\pi, \qquad k_3\pi = k_4\pi = \pi.$$

إذن

$$\frac{dw}{dz} = A(z+1)^{-1}(z - x_2)(z-1)^{-1}$$

$$= A\frac{z - x_2}{z^2 - 1} = \frac{A}{2}\left(\frac{1 + x_2}{z+1} + \frac{1 - x_2}{z-1}\right),$$

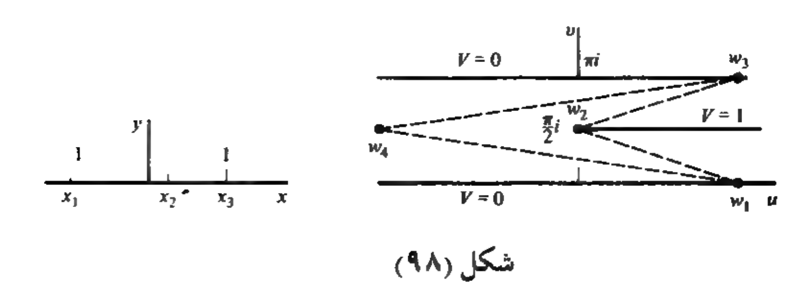
وبالتالى فإن التحويلة من النصف العلوى للمستوى المركب z إلى الشريحة المقسومة فى المستوى المركب w تكون

$$w = \frac{A}{2}\left[(1 + x_2)\operatorname{Log}(z+1) + (1 - x_2)\operatorname{Log}(z-1)\right] + B. \quad (١)$$

إفرض أن A_1 ، A_2 ؛ B_1 ، B_2 هى الأجزاء الحقيقية والتخيلية للثابتين B,A على الترتيب . عندما

$z=x$ ، تقع النقطة w على حدود الشريحة المقسومة ، وطبقا لمعادلة (١) نحصل على

$$u + iv = \tfrac{1}{2}(A_1 + iA_2)\{(1 + x_2)[\mathrm{Log}|x + 1| + i\arg(x + 1)] + (1 - x_2)[\mathrm{Log}|x - 1| + i\arg(x - 1)]\} + B_1 + iB_2. \quad (٢)$$



شكل (٩٨)

لتعيين الثوابت هنا ، نلاحظ أولا أن الوضع النهائى للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين w_4,w_1 هو محور الإحداثيات u . هذا الخط هو صورة جزء محور السينات الواقع على يسار النقطة $x_1=-1$ ، وهذا راجع إلى أن القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين w_4,w_3 هى صورة جزء محور السينات الواقع على يمين $x_3=1$ ، والضلعان الآخران للشكل الرباعى هما صورتا القطعتين المستقيمتين الباقيتين من محور السينات .
إذن عندما $v=0$ وتؤول u إلى مالا نهاية من خلال قيم موجبة ، تقترب النقطة المناظرة x إلى النقطة $z=-1$ من اليسار . إذن

$$\arg(x + 1) = \pi, \qquad \arg(x - 1) = \pi,$$

وتؤول $\mathrm{Log}|x+1|$ إلى $-\infty$. وأيضاً ، حيث أن $-1 < x_2 < 1$ ، فإن الجزء الحقيقى للمقدار داخل الأقواس المزدوجة فى معادلة (٢) يؤول إلى $-\infty$. وحيث أن $v=0$ فإنه ينتج أن $A_2=0$ ، وفيما عدا ذلك فإن الجزء التخيلى للطرف الأيمن يصبح لانهائيا . بمساواة الأجزاء التخيلية فى الطرفين ، نجد أن

$$0 = \tfrac{1}{2}A_1[(1 + x_2)\pi + (1 - x_2)\pi] + B_2.$$

إذن ،

$$-\pi A_1 = B_2, \qquad A_2 = 0. \quad (٣)$$

الوضع النهائى للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين w_2,w_1 هو الشعاع $v=\pi/2,\ u \geqq 0$. النقط الواقعة على هذا الشعاع هى صور النقط $z=x$ حيث $-1 < x \leqq x_2$ ، وبالتالى فإن

$$\arg(x + 1) = 0, \qquad \arg(x - 1) = \pi.$$

بمساواة الأجزاء التخيلية فى طرفى معادلة (٢) عند هذه النقط ، نجد أن

$$\frac{\pi}{2} = \frac{A_1}{2}(1 - x_2)\pi + B_2. \tag{٤}$$

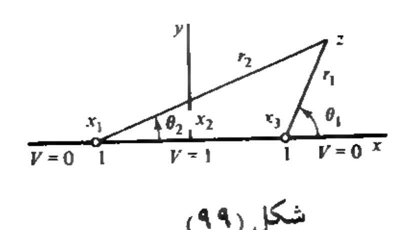
وأخيرا ، فإن الأوضاع النهائية لنقط القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين w_4, w_3 هي النقط $u + \pi i$. وهذه النقط هي صور النقط x حيث $x > 1$. بمساواة الأجزاء التخيلية فى معادلة (٢) عند هذه النقط نجد أن :

$$\pi = B_2.$$

إذن ، من معادلتى (٣) ، (٤) ، نجد أن

$$A_1 = -1, \qquad x_2 = 0.$$

وبالتالى فإن $x = 0$ هى النقطة التى صورتها الرأس $w = \pi i/2$ ، وبالتعويض بهذه القيم فى المعادلة (٢) ومساواة الأجزاء الحقيقية نجد أن $B_1 = 0$.



شكل (٩٩)

بذلك تصبح التحويلة (١) :

$$w = -\tfrac{1}{2}[\text{Log}(z+1) + \text{Log}(z-1)] + \pi i, \tag{٥}$$

أى أن :

$$z^2 = 1 + e^{-2w}. \tag{٦}$$

تحت تأثير هذه التحويلة ، تصبح الدالة التوافقية المطلوبة $V(u,v)$ دالة توافقية فى المتغيرين x,y فى المنطقة $y > 0$ وتحقق الشروط الحدية الموضحة بشكل (٩٩) . لاحظ أن $x_2 = 0$ فى هذه الحالة . الدالة التوافقية فى نصف المستوى هذا والتى تأخذ هذه القيم على الحدود هى الجزء التخيلى من الدالة التحليلية

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\text{Log}\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{\pi}\text{Log}\frac{r_1}{r_2} + \frac{i}{\pi}(\theta_1 - \theta_2),$$

حيث θ_1 ، θ_2 يأخذان القيم من صفر إلى π . بكتابة ظل كل من هاتين الزاويتين كدالة فى x,y وإجراء التبسيطات اللازمة نجد أن :

$$\tan \pi V = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}. \tag{٧}$$

المعادلة (٦) تزودنا بصيغ للمقادير $x^2 + y^2$ ، $x^2 - y^2$ بدلالة u,v . من الصيغة (٧) نجد

إذن أن العلاقة بين الجهد V والاحداثيات u,v يمكن كتابتها على الصورة

$$\tan \pi V = \frac{1}{s}\sqrt{e^{-4u} - s^2} \qquad (٨)$$

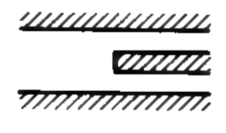
حيث

$$s = -1 + \sqrt{1 + 2e^{-2u}\cos 2v + e^{-4u}}.$$

تمـــاريـــن

١ – استخدم تحويلة شفارتز – كريستوفل للحصول على الدالة الراسمة المعطاة مع شكل (٢٢) بملحق (٢) .

٢ – بين لماذا يكون حل مسألة السريان فى مجرى به عائق على صورة شريحة مستطيلة نصف لا نهائية (شكل (١٠٠)) يكون متضمنا فى حل المسألة التى عولجت فى بند (٩٧) .



شكل (١٠٠)

٣ – انظر شكل (٢٩) بملحق (٢) . عندما تتحرك النقطة z إلى اليمين على امتداد الجزء السالب من المحور الحقيقى بحيث $x \leqq -1$ ، تتحرك صورتها w إلى اليمين على امتداد الشعاع $u \leqq 0, v = h$. وعندما تتحرك النقطة z إلى اليمين على امتداد القطعة المستقيمة $-1 \leqq x \leqq 1, y = 0$ ، تتحرك صورتها w فى اتجاه تناقص v على امتداد القطعة المستقيمة $u = 0, 0 \leqq v \leqq h$. وأخيرا ، عندما تتحرك z إلى اليمين على امتداد الجزء الموجب من المحور الحقيقى بحيث $x \geqq 1$ ، تتحرك صورتها w إلى اليمين على امتداد الجزء الموجب من المحور الحقيقى . لاحظ التغيرات فى اتجاه حركة w عند صورتى النقطتين $z = -1$ و $z = 1$. هذه التغيرات توضح أن المشتقة لدالة راسمة يمكن أن تكون

$$\frac{dw}{dz} = k\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{1/2}$$

حيث k ثابت ما . من ذلك احصل على التحويلة المعطاة هناك . تحقق أنه عند كتابة التحويلة على الصورة

$$w = \frac{h}{\pi}\{(z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2} + \mathrm{Log}\,[z + (z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2}]\}$$

حيث $0 \leqq \arg(z \pm 1) \leqq \pi$ ، فإنها ترسم الحدود بالطريقة المبينة بالشكل .

٤ – لتكن T(u,v) درجات الحرارة للحالة المستقرة المقيدة Bounded steady state فى الجزء المظلل من المستوى المركب w والموضح بشكل (٢٩) بملحق (٢) مع الشروط

الحدية $T(u,h)=1$ عندما $u<0$ و $T=0$ على الجزء الباقى $(B'C'D')$ من الحدود .
بدلالة بارامتر حقيقى α $(0<\alpha<\pi/2)$، اثبت أن صورة كل نقطة $z=i\tan\alpha$ على الجزء الموجب من المحور التخيلى y هى النقطة

$$w=\frac{h}{\pi}\left[\operatorname{Log}(\tan\alpha+\sec\alpha)+i\left(\frac{\pi}{2}+\sec\alpha\right)\right]$$

(انظر تمرين (٣)) واثبت كذلك أن درجة الحرارة عند تلك النقطة w تعطى بالعلاقة

$$T(u,v)=\frac{\alpha}{\pi}\qquad\qquad\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

٥ - لتكن F(w) دالة الجهد المركب لسريان سائل على عتبة فى قاع مجرى عميق ممثلا بالجزء المظلل من المستوى المركب w المبين بشكل (٢٩) بملحق (٢) ، حيث تقترب سرعة السائل V من الثابت الحقيقى V_0 عندما تؤول $|w|$ إلى مالا نهاية فى تلك المنطقة . التحويلة التى ترسم النصف العلوى من المستوى المركب z فوق تلك المنطقة هى التحويلة المعطاة فى تمرين (٣) . باستخدام المتطابقة

$$dF/dw=(dF/dz)(dz/dw),$$

اثبت أن

$$\overline{V(w)}=V_0(z-1)^{1/2}(z+1)^{-1/2};$$

اثبت كذلك ، بدلالة النقط $z=x$ التى تكون صورها النقط على امتداد قاع المجرى ، أن

$$|V|=|V_0|\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}.$$

من هذا لاحظ أن مقياس السرعة يزداد من $|V_0|$ على امتداد $A'B'$ ليصل $|V|=\infty$ عند B ، ثم يتناقص ليعدم عند C' ، وبعد ذلك يزداد من C' إلى D ليصل $|V_0|$ لاحظ أيضاً أن مقياس السرعة يكون $|V_0|$ عند النقطة $w=ih(\frac{1}{2}+1/\pi)$ بين B' و C'

الفصل الحادى عشر

صيغ التكامل من نوع بواسون

Integral Formulas of Poisson Type

فى هذا الباب سنكشف النقاب عن نظرية تمكننا من الحصول على حلول للعديد من مسائل الشروط الحدية عندما يمكن التعبير عن هذه الحلول بدلالة تكاملات محددة أو معتلة . وبالتالى يمكننا مباشرة حساب الكثير من التكاملات التى تظهر فى مثل تلك المسائل .

٩٩ – صيغة تكامل بواسون The Poisson Integral Formula

افرض أن f دالة تحليلية عند جميع نقط كفاف مغلق بسيط C_0 ونقط داخليته وأن الاتجاه الدورانى لهذا الكفاف هو الاتجاه الموجب . من المعلوم أن صيغة تكامل كوشى :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(s)}{s-z}\,ds \qquad (١)$$

تعبر عن قيمة f عند أى نقطة z من نقاط داخلية C_0 بدلالة قيم f عند نقط s تنتمى للكفاف C_0 . عندما يكون C_0 دائرة ، يمكننا الحصول من الصيغة (١) على صيغة مناظرة لدالة توافقية ، أى أنه يمكننا حل مسألة دريشلت بالنسبة للدائرة .

اعتبر الحالة التى يكون فيها C_0 هو الدائرة $s = r_0 \exp(i\phi)$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ، واكتب $z = r\exp(i\theta)$ حيث $0 < r < r_0$ (شكل (١٠١)) . معكوس النقطة الغير صفرية z بالنسبة للدائرة هو النقطة z_1 الواقعة على نفس الشعاع الذى تقع عليه النقطة z والتى تحقق الشرط $|z_1||z| = {r_0}^2$ ، أى أن

$$z_1 = \frac{{r_0}^2}{r}\exp(i\theta) = \frac{{r_0}^2}{\bar{z}} = \frac{s\bar{s}}{\bar{z}}. \qquad (٢)$$

شكل (١٠١)

وحيث أن z_1 تنتمى لخارجية الدائرة C_0 ، فإنه ينتج من نظرية كوشى – جورساه أن قيمة التكامل المعطى فى (١) يساوى صفراً عند وضع z_1 بدلا من z فى الدالة المكاملة .
إذن ، باستخدام التمثيل البارامترى المذكور للمنحنى C_0 ، يمكننا أن نكتب

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{s}{s-z} - \frac{s}{s-z_1}\right)f(s)\,d\phi$$

مع مراعاة أننا سنحتفظ بالرمز s ليقوم مقام $r_0 \exp(i\phi)$ وذلك للسهولة .
لاحظ أنه نظرا للتعبير الأخير فى (٢) للعدد z_1 فإن المقدار داخل الأقواس يمكن كتابته على الصورة

$$\frac{s}{s-z} - \frac{1}{1-\bar{s}/\bar{z}} = \frac{s}{s-z} + \frac{\bar{z}}{\bar{s}-\bar{z}} = \frac{{r_0}^2 - r^2}{|s-z|^2}. \tag{٣}$$

بذلك نحصل على صورة أخرى لصيغة تكامل كوشى (١) :

$$f(re^{i\theta}) = \frac{{r_0}^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(r_0 e^{i\phi})}{|s-z|^2}\,d\phi \tag{٤}$$

عندما $0 < r < r_0$ وهذه الصورة صالحة أيضاً عندما $r = 0$ ، وفى هذه الحالة تؤول الصيغة مباشرة إلى الصيغة (١) عندما $z=0$.
المقدار $|s-z|$ هو البعد بين النقطتين z,s ، وهنا يتحقق قانون جيب التمام (انظر شكل (١٠١)) :

$$|s-z|^2 = {r_0}^2 - 2r_0 r\cos(\phi-\theta) + r^2 > 0. \tag{٥}$$

إذن ، إذا كان u هو الجزء الحقيقى للدالة التحليلية f ، فإننا نحصل من العلاقة (٤) على

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{({r_0}^2 - r^2)u(r_0,\phi)}{{r_0}^2 - 2r_0 r\cos(\phi-\theta) + r^2}\,d\phi \tag{٦}$$

حيث $r < r_0$. هذه الصيغة الأخيرة تعرف **بصيغة تكامل بواسون** **Poisson integral formula** للدالة التوافقية u فى القرص المفتوح المحدد بالدائرة $r = r_0$.
العلاقة (٦) تعطى تحويلا تكامليا خطيا من $u(r_0,\phi)$ إلى $u(r,\theta)$. قلب هذه التحويلة ، عدا بالنسبة للمعامل $1/(2\pi)$ ، هو الدالة الحقيقية

$$P(r_0,r,\phi-\theta) = \frac{{r_0}^2 - r^2}{{r_0}^2 - 2r_0 r\cos(\phi-\theta) + r^2} \tag{٧}$$

والذى يعرف باسم **قلب بواسون** **Poisson Kernel** . الدالة $P(r_0,r,\phi-\theta)$ تمثل أيضاً

بالصيغ (٣) ، ونرى من ثالث هذه الصيغ أن الدالة تكون دائماً موجبة . بالإضافة إلى ذلك ، فحيث أن العدد $\bar{z}/(\bar{s}-\bar{z})$ ومرافقه $z/(s-z)$ لهما نفس الأجزاء الحقيقية ، فإننا نجد من الصيغة الثانية فى (٣) أن

$$P(r_0,r,\phi-\theta) = \text{Re}\left(\frac{s}{s-z}+\frac{z}{s-z}\right) = \text{Re}\left(\frac{s+z}{s-z}\right). \tag{٨}$$

إذن $P(r_0,r,\phi-\theta)$ دالة توافقية فى المتغيرين θ ، r لنقط داخلية C_0 لكل نقطة ثابتة s على C_0 . نلاحظ كذلك من معادلة (٧) أن $P(r_0,r,\phi-\theta)$ دالة زوجية دورية فى المتغير $\phi-\theta,$ دورتها 2π وقيمتها تساوى واحد عندما $r=0$

يمكننا الآن كتابة صيغة تكامل بواسون (٦) على الصورة

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0,r,\phi-\theta)u(r_0,\phi)\,d\phi \tag{٩}$$

حيث $(r<r_0)$. وفى الحالة الخاصة عندما $f(z)=u(x,y)=1$ ، تبين معادلة (٩) أن P لها الخاصية :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0,r,\phi-\theta)\,d\phi = 1 \tag{١٠}$$

حيث $r<r_0$

لاحظ أننا افترضنا أن f تحليلية ليس فقط عند جميع نقط داخلية C_0 بل كذلك عند نقط C_0 نفسه وأن u تكون بالتالى توافقية فى نطاق يحوى جميع نقط هذه الدائرة . وعلى سبيل الخصوص ، u تكون متصلة على C_0 . فيما يلى سنخفف من هذه الشروط .

١٠٠ – مسألة دريشلت لقرص A Dirichlet Problem for a Disk

افرض أن F دالة معطاة للمتغير θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ ، وأنها متصلة قطعة بقطعة . سنثبت أن الدالة

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0,r,\phi-\theta)F(\phi)\,d\phi \tag{١}$$

حيث $(r<r_0)$ ، والتى يمكن أن نطلق عليها تحويلة تكامل بواسون للدالة F ، تحقق الخصائص التالية : **U تكون توافقية لجميع نقط داخلية الدائرة** $r=r_0$ ، **وأن**

$$\lim_{r\to r_0} U(r,\theta) = F(\theta) \qquad (r<r_0) \tag{٢}$$

لكل قيمة ثابتة θ تكون عندها F متصلة .

إذن تكون U حلا لمسألة دريشلت للقرص $r < r_0$ ، بمعنى أن القيمة الحدية $F(\theta)$ تكون نهاية $U(r,\theta)$ عندما تقترب النقطة (r,θ) من النقطة (r_0,θ) على امتداد نصف قطر ، عدا عند عدد محدود من النقط (r_0,θ) التى تكون عندها الدالة F غير متصلة .

قبل أن نبرهن التقرير المذكور أعلاه ، دعنا نستخدمه لإيجاد الجهد $V(r,\theta)$ داخل اسطوانة $r = 1$ حيث الشروط الحدية تلك الموضحة بشكل (٧٢) ، بمعنى أن الجهد ينعدم على أحد نصفى السطح ويساوى الوحدة على النصف الآخر للسطح . وقد سبق حل هذه المسألة فى بند (٨٦) باستخدام التحويلات الحافظة للزوايا الموجهة . فى صيغة (١) نكتب V بدلا من U ، $r_0 = 1$ و $F(\phi) = 0$ عندما $0 < \phi < \pi$ و $F(\phi) = 1$ عندما $\pi < \phi < 2\pi$ لنحصل على

$$V(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} P(1,r,\phi - \theta)\, d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{(1 - r^2)\, d\phi}{1 + r^2 - 2r\cos(\phi - \theta)}.$$

تكامل غير محدد للدالة $P(1,r,\psi)$ هو

$$\int P(1,r,\psi)\, d\psi = 2\arctan\left(\frac{1 + r}{1 - r}\tan\frac{\psi}{2}\right) \qquad (٣)$$

وذلك لأن الدالة المكاملة هنا هى مشتقة هى الدالة فى الطرف الأيسر بالنسبة إلى ψ . هذه الدالة تعطى القيمة $-\pi$ عندما $\psi/2 = -\pi/2$ والقيمة π عندما $\psi/2 = \pi/2$ وذلك حتى تكون دالة متصلة تزداد قيمها من $-\pi$ إلى 2π ، عندما تزداد $\psi/2$ من $-\pi/2$ إلى π . هذا هو المدى المطلوب لقيم $\psi/2$ وذلك لأن $\psi = \phi - \theta$ وأن θ و ϕ تتغيران من π إلى 2π ومن صفر إلى 2π على الترتيب . إذن

$$\pi V(r,\theta) = \arctan\left(\frac{1 + r}{1 - r}\tan\frac{2\pi - \theta}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1 + r}{1 - r}\tan\frac{\pi - \theta}{2}\right),$$

حيث من الواضح فيزيائيا أن قيم $\pi V(r,\theta)$ تقع فى المدى من صفر إلى π .
بتبسيط الصورة التى حصلنا عليها للدالة $\tan(\pi V)$ من هذه المعادلة الأخيرة ، نجد أن

$$V(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1 - r^2}{2r\sin\theta}\right) \qquad (0 \leqq \arctan t \leqq \pi). \qquad (٤)$$

وهذا هو الحل الذى حصلنا عليه قبل ذلك بدلالة الإحداثيات الكارتيزية .

الدالة U المعرفة بالعلاقة (١) توافقية على داخلية الدائرة $r = r_0$ وذلك لأن P دالةتوافقية فى المتغيرين θ ، r على نفس النطاق . وأكثر تحديدا ، نلاحظ أنه حيث أن F متصلة قطعة بقطعة ، فإنه يمكن كتابة التكامل (١) كمجموع عدد محدود من تكاملات محددة كل منها دالته المكاملة متصلة فى $r, \theta, \phi.$. المشتقات الجزئية لهذه الدوال المكاملة بالنسبة لكل من المتغيرين θ ، تكون أيضاً متصلة . وحيث أنه يمكن تبديل ترتيب عمليتى التكامل والتفاضل بالنسبة إلى r ، θ وحيث أن P تحقق معادلة لابلاس فى الاحداثيات القطبية r ، θ ، فإنه ينتج أن الدالة U تحقق معادلة لابلاس أيضاً .

للتحقق من وجود الشرط (٢) ، فإننا فى حاجة لإثبات أنه إذا كانت F متصلة عند θ ، فإنه لكل عدد موجب ε يوجد عدد موجب δ بحيث

$$|U(r,\theta) - F(\theta)| < \varepsilon \tag{٥}$$

عندما $0 < r_0 - r < \delta.$

من خاصية (١٠) بند (٩٩) ، يمكن كتابة المتباينة (٥) على الصورة

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0,r,\phi - \theta)[F(\phi) - F(\theta)]\, d\phi \right| < \varepsilon. \tag{٦}$$

سنجد من الملائم أن نوسع نطاق تعريف F بحيث تصبح دورية ودورتها 2π وذلك حتى تصبح الدالة المكاملة دورية فى ϕ ولها نفس الدورة

حيث أن F متصلة عند θ ، فإنه يوجد عدد موجب صغير α مناظر للعدد الموجب المعطى ε بحيث أن

$$|\phi - \theta| \leqq \alpha \quad \text{عندما} \quad |F(\phi) - F(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

دعنا نكتب

$$I_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha} P(r_0,r,\phi - \theta)[F(\phi) - F(\theta)]\, d\phi,$$

$$I_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta+\alpha}^{\theta-\alpha+2\pi} P(r_0,r,\phi - \theta)[F(\phi) - F(\theta)]\, d\phi.$$

وبالتالى يمكن كتابة المتباينة (٦) على الصورة

$$|I_1(r) + I_2(r)| < \varepsilon. \tag{٧}$$

وحيث أن P دالة موجبة القيم فبمراعاة خاصية (١٠) بند ٩٩ ، ينتج أن

$$|I_1(r)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha} P(r_0,r,\phi-\theta)|F(\phi)-F(\theta)|\,d\phi$$
$$< \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0,r,\phi-\theta)\,d\phi = \frac{\varepsilon}{2}$$

طالما كانت $r < r_0$.

بعد ذلك ، تذكر أن $P(r_0,r,\phi-\theta) = (r_0^2 - r^2)/|s-z|^2$ ولاحظ فى شكل (١٠١) أنه عندما $r \leqq r_0$، فإن المقدار $|s-z|^2$ يأخذ قيمة صغرى موجبة $m(\alpha)$ عندما تتغير السعة ϕ للعدد s بين $\theta+\alpha$ و $\theta-\alpha+2\pi$. إذا كانت M حدا أعلى للمقدار $|F(\phi)-F(\theta)|$ لجميع قيم θ ,ϕ ، فإنه ينتج أن

$$|I_2(r)| \leqq \frac{(r_0^2-r^2)M}{2\pi m(\alpha)}2\pi < \frac{2Mr_0}{m(\alpha)}(r_0-r) < \frac{\varepsilon}{2}$$

عندما $r_0 - r < m(\alpha)\varepsilon/(4Mr_0)$. وبالتالى ، إذا اختيرت α لتناظر العدد المعطى ε ، فإنه يمكن تعيين العدد $m(\alpha)$ ، ويكون $|I_1(r)| + |I_2(r)| < \varepsilon$ عندما $r_0 - r < \delta$ إذا كان

$$\delta = \frac{m(\alpha)\varepsilon}{4Mr_0}.$$

هذه إذن قيمة للعدد δ بحيث تتحقق متباينة (٧) أو متباينة (٦) . وبالتالى يتحقق التقرير (٥) عندما تأخذ δ هذه القيمة .

طبقا للصيغة (١) ، فإن قيمة U عند r=o تساوى

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\phi)\,d\phi.$$

إذن **قيمة دالة توافقية عند مركز الدائرة تساوى متوسط القيم الحدية على الدائرة .**

وكتمارين سنترك للقارىء فيما يلى مهمة إثبات أنه يمكن تمثيل الدالتين U.P بمتسلسلات تحوى الدوال التوافقية البسيطة $r^n \sin n\theta$ و $r^n \cos n\theta$ كما يلى

$$P(r_0,r,\phi-\theta) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\phi-\theta) \qquad (r < r_0), \qquad (٨)$$

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \qquad (r < r_0), \tag{٩}$$

حيث

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \cos n\phi \, d\phi, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \sin n\phi \, d\phi. \tag{١٠}$$

١٠١ – مسائل القيم الحدية المرتبطة Related Boundary Value Problems

سنترك للقارىء كتمارين مهمة إكمال تفاصيل براهين النتائج المعطاة فيما يلى . سنفترض أن الدالة F الممثلة للقيم الحدية على الدائرة r=ro متصلة قطعة بقطعة افرض أن $F(2\pi - \theta) = -F(\theta)$، بذلك تصبح الصيغة (١) لتكامل بواسون المعطاة ببند ١٠٠ هى

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [P(r_0,r,\phi - \theta) - P(r_0,r,\phi + \theta)]F(\phi) \, d\phi. \tag{١}$$

الدالة U تنعدم على نصفى القطرين الأفقيين $\theta = 0$, $\theta = \pi$ للدائرة، وهو الأمر المتوقع إذا ما اعتبرنا U على أنها درجة حرارة مستقرة . الصيغة (١) تحل إذن **مسألة دريشلت للمنطقة النصف دائرية** $r < r_0$, $0 < \theta < \pi$ **(شكل (١٠٢)) حيث U = o على القطر AB و**

$$\lim_{r \to r_0} U(r,\theta) = F(\theta) \qquad (r < r_0, 0 < \theta < \pi) \tag{٢}$$

لكل قيمة ثابتة θ **تكون عندها F متصلة .**

إذا كانت $F(2\pi - \theta) = F(\theta)$, فإن

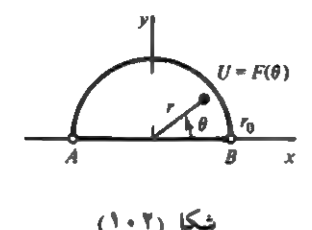
$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [P(r_0,r,\phi - \theta) + P(r_0,r,\phi + \theta)]F(\phi) \, d\phi; \tag{٣}$$

و $U_\theta(r,\theta) = 0$ عندما $\theta = \pi$ أو $\theta = 0$. الصيغة (٣) تعطينا بذلك **دالة توافقية فى المنطقة النصف دائرية** $r < r_0$, $0 < \theta < \pi$ **(شكل (١٠٢)) وتحقق الشرط (٢) علاوة على الشرط أن مشتقتها فى اتجاه العمود تنعدم على القطر AB .**

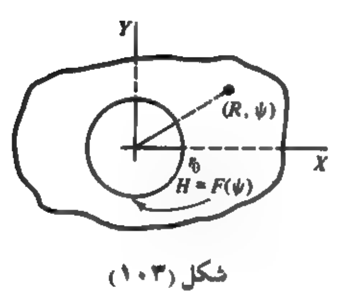
الدالة التحليلية $z = r_0^2/Z$ ترسم الدائرة $|Z| = r_0$ فى المستوى المركب Z فوق الدائرة $|z| = r_0$ فى المستوى المركب z ، وترسم أيضا خارجية الدائرة الأولى فوق داخلية الدائرة الثانية . بكتابة $z = r \exp(i\theta)$ $Z = R \exp(i\psi)$ نلاحظ أن $r = r_0^2/R$

$\theta = 2\pi - \psi$ ، بذلك تحول الدالة التوافقية $U(r,\theta)$ الممثلة بالصيغة (١) ببند (١٠٠) إلى الدالة

$$U\left(\frac{r_0^2}{R}, 2\pi - \psi\right) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 - R^2}{r_0^2 - 2r_0 R\cos(\phi + \psi) + R^2} F(\phi)\, d\phi$$



شكل (١٠٢)



شكل (١٠٣)

وهذه الدالة الأخيرة توافقية فى النطاق $R > r_0$. والآن فبصفة عامة إذا كانت $u(r,\theta)$ توافقية فإن الدالة $u(r, -\theta)$. تكون توافقية كذلك (انظر تمرين (١٠) من هذا البند) . إذن الدالة $H(R,\psi) = U(r_0^2/R, \psi - 2\pi)$ ، أو

$$H(R,\psi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0,R,\phi - \psi)F(\phi)\, d\phi \tag{٤}$$

حيث $R > r_0$ ، تكون أيضاً توافقية . ولكل قيمة ثابتة ψ تكون عندها $F(\psi)$ متصلة نجد من شرط (٢) بند (١٠٠) ، أن

$$\lim_{R \to r_0} H(R,\psi) = F(\psi) \qquad (R > r_0). \tag{٥}$$

إذن الصيغة (٤) تحل **مسألة دريشلت للمنطقة الخارجية للدائرة $R = r_0$ فى المستوى المركب Z** (شكل (١٠٣)) . ونلاحظ أن قلب بواسون يكون سالبا فى هذه الحالة ، وأيضاً

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0,R,\phi-\psi)\,d\phi = -1 \qquad (R > r_0), \qquad (٦)$$

$$\lim_{R\to\infty} H(R,\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\phi)\,d\phi. \qquad (٧)$$

تمــاريـــن

١ – استخدم صيغة تكامل بواسون (١) ببند (١٠٠) لاستنتاج الصيغة

$$V(x,y) = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+(y-1)^2-1} \qquad (0 \leqq \arctan t \leqq \pi)$$

لجهد الكهرباء الساكنة داخل الأسطوانة $x^2+y^2=1$ إذا كانت $V=1$ على الربع الأول $(x>0, y>0)$ من السطح الأسطوانى وكانت $V=0$ على بقية السطح . لاحظ كذلك أن $1\text{-}V$ هو حل تمرين (٨) بند (٨٦) .

٢ – افرض أن T ترمز للحرارة المستقرة فى قرص $r \leqq 1$ أو جهه معزولة ، عندما $T=1$ على القوس $0<\theta<2\theta_0$ من الحافة $r=1$ و $T=0$ على بقية الحافة ، حيث $0<\theta_0<\pi/2$. استخدم صيغة تكامل بواسون لإثبات أن

$$T(x,y) = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{(1-x^2-y^2)y_0}{(x-1)^2+(y-y_0)^2-{y_0}^2} \qquad (0 \leqq \arctan t \leqq \pi)$$

حيث $y_0 = \tan\theta_0$. تحقق من أن الدالة T تحقق الشروط الحدية .

٣ – افرض أن I دالة الدفع الأحادية المحدودة Finite Unit Impulse Function الآتية

$$I(h,\theta-\theta_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{h} & \text{و} \quad \theta_0 < \theta < \theta_0 + h, \\ 0 & \text{و} \quad 0 \leqq \theta < \theta_0 \text{ or } \theta_0 + h < \theta < 2\pi \end{cases}$$

حيث h ثابت موجب و $0 \leqq \theta_0 < 2\pi.$ لاحظ أن

$$\int_0^{2\pi} I(h,\theta-\theta_0)\,d\theta = 1.$$

بمساعدة نظرية القيمة المتوسطة للتكاملات ، اثبت أن

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{2\pi} P(r_0,r,\phi-\theta)I(h,\phi-\theta_0)\,d\phi = P(r_0,r,\theta-\theta_0)$$

حيث $r < r_0, h > 0$. وبالتالى عندما تؤول h إلى الصفر من خلال قيم موجبة فإن قلب بواسون $P(r_0,r,\theta-\theta_0)$ يكون هو النهاية للدالة التوافقية على داخلية الدائرة $r = r_0$ والتى الحدية تمثل بدالة الدفع $2\pi I(h,\theta-\theta_0)$.

٤ – اثبت أن الصيغة بتمرين (١١) بند (٦٦) التى تعطى مجموع متسلسلة جيوب التمام يمكن كتابتها على الصورة

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} k^n \cos n\theta = \frac{1-k^2}{1-2k\cos\theta + k^2}$$

حيث $-1 < k < 1$. ومن ثم اثبت أن قلب بواسون يمكن تمثيله بالمتسلسلة (٨) بند (١٠٠) .

٥ – اثبت أن المتسلسلة فى الصيغة (٨) بند (١٠٠) تقاربية تقارب منتظم بالنسبة إلى ϕ.ثم احصل من الصيغة (١) بهذا البند على المتسلسلة الممثلة (٩) هناك .

٦ – استخدم علاقتى (٩) ، (١٠) ببند (١٠٠) لايجاد درجات الحرارة المستقرة $T(r,\theta)$ فى اسطوانة مصمتة $r \leqq r_0$ طولها لانهائى إذا كان $T(r_0,\theta) = A\cos\theta$. اثبت أنه لا يوجد سريان للحرارة خلال المستوى $y = o$.

٧ – احصل على الحالات الخاصة الآتية

(أ) $$H(R,\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [P(r_0,R,\phi+\psi) - P(r_0,R,\phi-\psi)]F(\phi)\,d\phi,$$

(ب) $$H(R,\psi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [P(r_0,R,\phi+\psi) + P(r_0,R,\phi-\psi)]F(\phi)\,d\phi$$

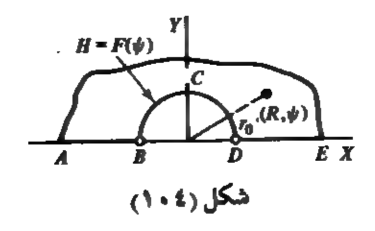
لصيغة (٤) بند (١٠١) وذلك للدالة التوافقية H فى المنطقة غير المحدودة $0 < \psi < \pi, R > r_0,$ الموضحة بشكل (١٠٤) بفرض أن هذه الدالة تحقق الشرط الحدى

$$\lim_{R\to r_0} H(R,\psi) = F(\psi) \qquad (R > r_0,\ 0 < \psi < \pi)$$

على نصف الدائرة وأن الدالة :

(أ) تنعدم على الشعاعين BA و DE .

(ب) تنعدم مشتقتها فى اتجاه العمود على الأشعة BA و DE .



شكل (١٠٤)

٨ – اعط التفاصيل الكاملة لاستنباط الصيغة (١) بند(١٠١)كحل لمسألة دريشلت المذكورة هناك للمنطقة الموضحة بشكل (١٠٢) .

٩ – اعط التفاصيل الكاملة لاستباط الصيغة (٣) بند (١٠١) كحل لمسألة الشروط الحدية المذكورة هناك .

١٠ – استبط صيغة (٤) بيند (١٠١) كحل لمسألة دريشلت للمنطقة الخارجية لدائرة (شكل (١٠٣)) . لتبين أن $u(r, -\theta)$ توافقية عندما تكون $u(r, \theta)$ توافقية ارجع إلى الصورة القطبية لمعادلة لابلاس المعطاة بتمرين (١١) بند (٢٠) .

١١ – اذكر لماذا تكون صيغة (٦) بند (١٠١) صحيحة .

١٢ – استبط معادلة (٧) ببند (١٠١) .

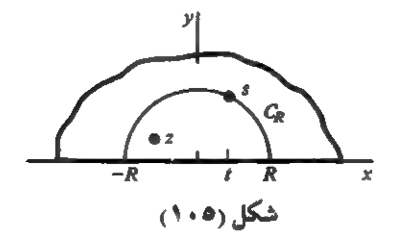
١٠٢ – صيغ التكامل لنصف مستوى Integral Formulas for a Half Plane

افرض أن f دالة تحليلية للمتغير z لجميع نقط نصف المستوى $\operatorname{Im} z \geqq 0$ وبحيث تحقق f خاصية الترتيب الآتية

$$|z^k f(z)| < M \qquad (\operatorname{Im} z \geqq 0) \tag{١}$$

لعددين ثابتين موجبين M,k . لنقطة ثابتة z فى الجزء الواقع أعلى المحور الحقيقى افرض أن C_R هو النصف العلوى من دائرة نصف قطرها R ومركزها نقطة الأصل وموجهة فى الاتجاه الموجب ، حيث $R > |z|$ (شكل (١٠٥)) . إذن فطبقا لصيغة تكامل كوشى ،

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(s)\,ds}{s-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{f(t)\,dt}{t-z}. \tag{٢}$$



شكل (١٠٥)

أول هذه التكاملات يقترب من الصفر عندما تؤول R إلى ∞ وذلك لأن $|f(s)| < M/R^k$ وبالتالى فإن

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}\,dt \qquad (\operatorname{Im} z > 0). \tag{٣}$$

وبسبب الشرط (١) ، يكون التكامل المعتل اعلاه تقاربيا ، والعدد الذى يقترب منه هو نفسه قيمة كوشى الأساسية له . (انظر بند (٧٢)) . الصيغة (٣) هى صيغة **تكامل**

كوشى لنصف المستوى $\operatorname{Im} z > 0$.

عندما تقع النقطة z فى الجزء الواقع أسفل المحور الحقيقى ، ينعدم الطرف الأيمن من معادلة (٢) ، وبالتالى ينعدم التكامل (٣) لمثل تلك النقطة . من هذا ينتج أنه عندما تقع z فى الجزء الواقع أعلى المحور الحقيقى فإننا نحصل على الصيغة التالية :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - z} + \frac{c}{t - \bar{z}} \right) f(t)\, dt \tag{٤}$$

حيث $\operatorname{Im} z > 0$ ، c ثابت اختيارى .

للحالتين $c = 1, c = -1$ تؤول هذه الصيغة على الترتيب إلى :

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(t)}{|t - z|^2}\, dt \qquad (y > 0), \tag{٥}$$

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t - x) f(t)}{|t - z|^2}\, dt \qquad (y > 0). \tag{٦}$$

إذا كانت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ، فإنه ينتج من صيغتى (٥) ، (٦) أن الدالتين التوافقيتين v,u يمكن تمثيلهما فى نصف المستوى $y>0$ بدلالة القيم الحدية للدالة u بالصيغتين

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y u(t,0)}{|t - z|^2}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y u(t,0)}{(t - x)^2 + y^2}\, dt \qquad (y > 0), \tag{٧}$$

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - t) u(t,0)}{(t - x)^2 + y^2}\, dt \qquad (y > 0). \tag{٨}$$

الصيغة (٧) تعرف بصيغة **تكامل بواسون لنصف المستوى** ، أو **صيغة تكامل شفارتز** . فى البند التالى سنخفف من الشروط اللازمة لتحقق صيغتى (٧)و (٨) .

١٠٣ – مسألة دريشلت لنصف المستوى A Dirichlet Problem for a Half Plane

افرض أن F دالة حقيقية للمتغير الحقيقى x ، محدودة لجميع قيم x ومتصلة لجميع قيم x ، عدا عند عدد محدود من القفزات المحدودة على الأكثر.عندما $y \geqq \varepsilon$, $|x| \leqq 1/\varepsilon$ حيث ε أى ثابت موجب ، يكون التكامل

$$I(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)\, dt}{(t - x)^2 + y^2}$$

منتظم التقارب بالنسبة للمتغيرين x , y ، تماماً كما هى الحال لتكاملات المشتقات الجزئية للدالة المكاملة بالنسبة للمتغيرين x,y . كل من هذه التكاملات هو مجموع لعدد محدود من التكاملات المعتلة أو المحددة على فترات تكون فيها الدالة F متصلة ، وبالتالى

فإن الدالة المكاملة لكل تكامل من تكاملات المجموع هى دالة متصلة فى المتغيرات y,x,t عندما $y \geqq \varepsilon$. وبالتالى ، فإن كل مشتقة جزئية للدالة I(x,y) تمثل بتكامل المشتقة المناظرة للدالة المكاملة طالما $y > 0$.

سنكتب $U(x,y) = yI(x,y)/\pi$. إذن U هى تحويلة تكامل شفارتز للدالة F ، كما يستتبع من معادلة (٧) . بيند (١٠٢) :

$$U(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yF(t)}{(t-x)^2 + y^2}\, dt \qquad (y > 0). \qquad (١)$$

مع إغفال المعامل $1/\pi$ ، يكون القلب هنا مساويا للقيمة $y/|t-z|^2$.هذا القلب هو الجزء التخيلى للدالة $1/(t-z)$ التى تكون تحليلية بالنسبة للعدد المركب z عندما $y > 0$. من هذا ينتج أن القلب دالة توافقية ، وبالتالى فإنها تحقق معادلة لابلاس فى المتغيرين x,y . وحيث أنه يمكن تبديل ترتيب عمليتى التفاضل والتكامل هنا ، فإن الدالة (١) تحقق تلك المعادلة . وذلك يستتبع أن تكون الدالة U توافقية عندما $y > 0$.

لإثبات أن

$$\lim_{y \to 0} U(x,y) = F(x) \qquad (y > 0) \qquad (٢)$$

لكل عدد ثابت x تكون عنده F متصلة ، فإننا نضع $t = x + y \tan r$ فى الصيغة (١) ونكتب

$$U(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(x + y\tan r)\, dr \qquad (y > 0). \qquad (٣)$$

إذا كانت

$$G(x,y,r) = F(x + y\tan r) - F(x)$$

وكان α عددا ثابتا موجبا صغيرا ، فإن

$$\pi[U(x,y) - F(x)] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(x,y,r)\, dr = I_1(y) + I_2(y) + I_3(y) \qquad (٤)$$

حيث

$$I_1(y) = \int_{-\pi/2}^{-\pi/2+\alpha} G(x,y,r)\, dr, \qquad I_2(y) = \int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2-\alpha} G(x,y,r)\, dr,$$

$$I_3(y) = \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} G(x,y,r)\, dr.$$

إذا كان M حدا أعلى للمقدار $|F(x)|$ ، فإن $|G(x,y,r)| \leqq 2M$.إذا أعطينا عددا موجبا ε فإننا نختار عدداً α بحيث $6M\alpha < \varepsilon$ ، إذن

$$|I_1(y)| \leqq 2M\alpha < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{و} \qquad |I_3(y)| \leqq 2M\alpha < \frac{\varepsilon}{3}.$$

سنبين فيما يلى أنه يوجد عدد موجب δ مناظر للعدد ε بحيث

$$|I_2(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{طالما} \qquad 0 < y < \delta$$

حيث أن F متصلة عند x ، فإنه يوجد عدد موجب γ بحيث

$$|G(x,y,r)| < \frac{\varepsilon}{3\pi} \qquad \text{طالما} \qquad 0 < y|\tan r| < \gamma$$

لاحظ أن القيمة العظمى للمقدار $|\tan r|$ عندما تتغير r بين $-\pi/2 + \alpha$ و $\pi/2 - \alpha$ تساوى $\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot\alpha$. إذن إذا كتبنا $\delta = \gamma \tan\alpha$ ، فإنه ينتج أن

$$|I_2(y)| < \frac{\varepsilon}{3\pi}(\pi - 2\alpha) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{طالما} \qquad 0 < y < \delta$$

بهذا نكون قد أثبتنا أن

$$|I_1(y)| + |I_2(y)| + |I_3(y)| < \varepsilon \quad \text{طالما} \quad 0 < y < \delta.$$

من هذه النتيجة الأخيرة والمعادلة (٤) ينتج مباشرة أن الشرط (٢) متحقق .

من هذا ينتج أن الصيغة (١) **تحل مسألة دريشلت لنصف المستوى** $y > 0$ وذلك بافتراض وجود الشرط الحدى (٢) . من الواضح من الصورة (٣) للصيغة (١) أن $|U(x,y)| \leqq M$ فى نصف المستوى حيث M حد أعلى للمقدار $|F(x)|$ ، أى أن U محدودة . ونلاحظ أن $U(x,y) = F_0$ عندما $F(x) = F_0$، حيث F_0 مقدار ثابت .

طبقا للصيغة (٨) بالبند السابق فإن الدالة

$$V(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-t)F(t)}{(t-x)^2 + y^2}\,dt \qquad (y > 0) \qquad (٥)$$

، تحت شروط معينة على الدالة F ، تكون مرافقا توافقيا للدالة U المعطاة بالصيغة (١) . وفى الحقيقة فإن **الصيغة (٥) تعطى مرافقا توافقيا للدالة U إذا كانت F متصلة عند جميع النقط ، وذلك فيما عدا عند عدد محدود من القفزات المحدودة على الأكثر ،** وإذا كانت F **تحقق خاصية ترتيب** $|x^kF(x)| < M$، **حيث** $k > 0$. وذلك لأنه تحت تأثير هذه الشروط نجد أن U,V تحققان معادلتى كوشى ـ ريمان عندما $y > 0$.

وسنترك كتمارين الحالات الخاصة من الصيغة (١) عندما تكون F دالة فردية أو زوجية .

١٠٤ - مسألة نويمان للقرص A Neumann Problem for a Disk

كما فى بند (٩٩) وشكل (١٠١) ، سنكتب $z = r\exp(i\theta),\ s = r_0 \exp(i\phi)$ حيث $r < r_0$ عندما تكون s ثابتة فإن الدالة

$$Q(r_0,r,\phi-\theta) = -2r_0 \operatorname{Log}|s-z| = -r_0 \operatorname{Log}[r_0^2 - 2r_0 r\cos(\phi-\theta) + r^2] \tag{١}$$

تكون توافقية لجميع نقط داخلية الدائرة $|z| = r_0$ وذلك لكونها الجزء الحقيقى للدالة $-2r_0 \operatorname{Log}|s-z|$ حيث الفرع القاطع للدالة $\log(z\text{-}s)$ شعاع خارج من النقطة s . وإذا كان ، علاوة على ذلك ، $r \neq 0$ و فإن

$$Q_r(r_0,r,\phi-\theta) = -\frac{r_0}{r}\,\frac{2r^2 - 2r_0 r\cos(\phi-\theta)}{r_0^2 - 2r_0 r\cos(\phi-\theta) + r^2} = \frac{r_0}{r}[P(r_0,r,\phi-\theta) - 1] \tag{٢}$$

حيث P قلب بواسون المعرف بالمعادلة (٧) ببند (٩٩) .

هذه الملاحظات ترجح أنه يمكن استخدام الدالة Q لكتابة تمثيل تكاملى لدالة توافقية U تأخذ مشتقتها U_r فى اتجاه العمود للدائرة $r = r_0$ قيما مفروضة $G(\theta)$ ،

إذا كانت G متصلة قطعة بقطعة وكان U_0 ثابتا اختياريا فإن الدالة

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(r_0,r,\phi-\theta)G(\phi)\,d\phi + U_0 \qquad (r < r_0) \tag{٣}$$

تكون توافقية وذلك لأن الدالة المكاملة توافقية فى المتغيرين θ r . إذا كانت القيمة المتوسطة للدالة G على الدائرة تساوى الصفر ،

$$\int_0^{2\pi} G(\phi)\,d\phi = 0, \tag{٤}$$

إذن ، طبقا لمعادلة (٢) ،

$$U_r(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_0}{r}[P(r_0,r,\phi-\theta) - 1]G(\phi)\,d\phi = \frac{r_0}{r}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0,r,\phi-\theta)G(\phi)\,d\phi.$$

والآن فمن معادلتى (١) ، (٢) بند (١٠٠) نجد أن :

$$\lim_{r\to r_0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0,r,\phi-\theta)G(\phi)\,d\phi = G(\theta) \qquad (r < r_0).$$

إذن

$$\lim_{r\to r_0} U_r(r,\theta) = G(\theta) \qquad (r < r_0) \tag{٥}$$

لكل قيمة من قيم θ تكون عندها G متصلة .

وحيث أن Q تكون ثابتة عندما r=o ، فإنه ينتج من معادلتى (٣) ، (٤) أن U_0 هى قيمة U عند مركز الدائرة .

عندما تكون G متصلة قطعة بقطعة وتحقق معادلة (٤) ، فإن الصيغة

$$U(r,\theta) = -\frac{r_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{Log}\,[r_0{}^2 - 2r_0 r\cos(\phi-\theta) + r^2]G(\phi)\,d\phi + U_0 \tag{٦}$$

حيث $r < r_0$ ، تحل **مسألة نويمان للمنطقة الداخلية للدائرة r=ro**،حيث $G(\theta)$ هى المشتقة فى اتجاه العمود للدالة التوافقية $U(r,\theta)$ على الحدود بمفهوم شرط (٥) .

القيم $U(r,\theta)$ يمكن أن تمثل درجات حرارة مستقرة فى قرص $r < r_0$ أوجهه معزولة . فى هذه الحالة ينص الشرط (٥) على أن الفيض الحرارى فى القرص خلال حافته يتناسب مع $G(\theta)$. شرط (٤) هو الشرط الفيزيائى الطبيعى المطلوب ليكون إجمالى المعدل الكلى لسريان الحرارة مساويا للصفر وذلك لأن درجات الحرارة لا تتغير مع الزمن .

ومن الممكن كتابة صيغة مناظرة لدالة توافقية H فى النطاق الخارجى للدائرة $r=r_0$ بدلالة Q على الصورة

$$H(R,\psi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(r_0,R,\phi-\psi)G(\phi)\,d\phi + H_0 \tag{٧}$$

حيث $R > r_0$، H_0 ثابت . وكما سبق ، سنفترض أن G متصلة قطعة قطعة وبأن

$$\int_0^{2\pi} G(\phi)\,d\phi = 0, \tag{٨}$$

إذن

$$H_0 = \lim_{R\to\infty} H(R,\psi)$$

و

$$\lim_{R\to r_0} H_R(R,\psi) = G(\psi) \qquad (R > r_0) \tag{٩}$$

لكل ψ تكون عندها G متصلة .

التحقق من صحة صيغة (٧) وكذلك دراسة حالات خاصة من صيغة (٣) التى

يمكن تطبيقها للمناطق الدائرية سنتركه للقارىء كتمارين .

١٠٥ مسألة نويمان لنصف المستوى A Neumann Problem for a Half Plane

افرض أن G(x) دالة متصلة لجميع قيم x ، فيما عدا لعدد محدود من القفزات المحدودة على الأكثر ، وافرض كذلك أنها تحقق خاصية ترتيب

$$|x^k G(x)| < M \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{١}$$

حيث $k > 1$. لكل عدد حقيقى ثابت t تكون الدالة $\operatorname{Log}|z-t|$ توافقية فى نصف المستوى $\operatorname{Im} z > 0$. وبالتالى ، فإن الدالة

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Log}|z-t|\,G(t)\,dt + U_0 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Log}[(t-x)^2+y^2]G(t)\,dt + U_0 \qquad (y>0), \end{aligned} \tag{٢}$$

حيث $y > 0$ ، U_0 ثابت حقيقى ، تكون توافقية فى نفس نصف المستوى .

لقد كتبنا صيغة (٢) آخذين فى الاعتبار صيغة شفارتز (١) ببند (١٠٣) ، وذلك لأن صيغة (٢) تعطى

$$U_y(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yG(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt \qquad (y>0). \tag{٣}$$

من معادلتى (١) ، (٢) ببند (١٠٣) ينتج أن

$$\lim_{y\to 0} U_y(x,y) = G(x) \qquad (y>0) \tag{٤}$$

عند كل نقطة x تكون عندها G متصلة .

من هذا نرى أن صيغة التكامل (٢) تحل مسألة **نويمان لنصف المستوى** $y > 0$ مع افتراض وجود الشرط الحدى (٤) . ولكن يجب ملاحظة أننا لم نضع شروطا كافية على G لضمان أن تكون الدالة التوافقية U محدودة عندما يزداد $|z|$

عندما تكون G دالة فردية ، يمكن كتابة صيغة (٢) على الصورة

$$U(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \operatorname{Log}\frac{(t-x)^2+y^2}{(t+x)^2+y^2}\,G(t)\,dt \qquad (x>0,\, y>0). \tag{٥}$$

وهذه تمثل دالة توافقية فى الربع الأول. $x > 0, y > 0$ ، علاوة على أنها تحقق الشروط الحدية

$$U(0,y) = 0 \qquad (y > 0), \tag{٦}$$

$$\lim_{y\to 0} U_y(x,y) = G(x) \qquad (x > 0,\ y > 0). \tag{٧}$$

يمكن وصف قلوب جميع صيغ التكامل للدوال التوافقية التى عرضنا لها فى هذا الباب بدلالة دالة حقيقية وحيدة للمتغيرات المركبة $z = x + iy$ ، $w = u + iv$:

$$K(z,w) = \text{Log}\ |z - w| \qquad (z \neq w). \tag{٨}$$

وهذه الدالة الأخيرة هى **دالة جرين Green's Function للجهد اللوغاريتمى** فى المستوى المركب z . وهى دالة متماثلة ، بمعنى أن $K(w,z) = K(z,w)$. صور القلوب التى استخدمت فيما سبق بدلالة K ومشتقاتها ستعطى فى التمارين .

تمـــاريــن

١ - استنتج الحالة الخاصة الآتية من صيغة (١) بند (١٠٣) :

$$U(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{(t-x)^2+y^2} - \frac{1}{(t+x)^2+y^2}\right] F(t)\,dt$$

حيث $x > 0,\ y > 0$ لدالة محدودة U وتوافقية فى الربع الأول من المستوى وتحقق الشروط الحدية

$$U(0,y) = 0 \qquad (y > 0),$$
$$\lim_{y\to 0} U(x,y) = F(x) \qquad (x > 0,\ x \neq x_j,\ y > 0),$$

حيث F محدودة لجميع قيم x الموجبة ومتصلة لجميع قيم x الموجبة عداعند عدد محدود على الأكثر من القفزات المحدودة عند النقط x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$

٢ - استنتج الحالة الخاصة الآتية من صيغة (١) بند (١٠٣) :

$$U(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{(t-x)^2+y^2} + \frac{1}{(t+x)^2+y^2}\right] F(t)\,dt \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

وذلك لدالة محدودة U توافقية فى الربع الأول من المستوى وتحقق الشروط الحدية :

$$U_x(0,y) = 0 \qquad (y > 0),$$
$$\lim_{y\to 0} U(x,y) = F(x) \qquad (x > 0,\ x \neq x_j,\ y > 0),$$

حيث F محدودة لجميع قيم x الموجبة ومتصلة لنفس القيم عدا ربما لعدد محدود من

القفزات عند عدد محدود على الأكثر من النقط $x = x_j$: $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

٣ – ابدل محورى y.x كل مكان الآخر ببند (١٠٣) بحيث يكون

$$U(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xF(t)}{(t-y)^2 + x^2}\, dt \qquad (x > 0)$$

هو حل لمسألة دريشلت لنصف المستوى $x > 0$.اكتب

$$\lim_{x\to 0} U(x,y) = \begin{cases} 1 & (x > 0,\ -1 < y < 1) \\ 0 & (x > 0,\ |y| > 1) \end{cases}$$

ثم استنتج الصيغ التالية للدالة ومرافقتها التوافقية V – :

$$U(x,y) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{y+1}{x} - \arctan\frac{y-1}{x}\right),$$

$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Log}\,\frac{x^2 + (y+1)^2}{x^2 + (y-1)^2}$$

حيث $-\pi/2 \leq \arctan t \leq \pi/2.$. كذلك اثبت أن

$$\pi[V(x,y) + iU(x,y)] = \mathrm{Log}\,(z + i) - \mathrm{Log}\,(z - i),$$

حيث $z = x + iy$.

٤ – افرض أن T(x,y) تمثل درجات الحرارة المستقرة المقيدة فى صفيحة $x > 0, y > 0$ ذات أوجه معزولة عندما

$$\lim_{y\to 0} T(x,y) = F_1(x) \qquad و \qquad \lim_{x\to 0} T(x,y) = F_2(y)$$

حيث $(x > 0, y > 0)$ (شكل (١٠٦)) . وهنا F_1, F_2 دالتان محدودتان ومتصلتان فيما عدا عند عدد محدود على الأكثر من القفزات المحدودة . اكتب $x + iy = z$ واثبت باستخدام العلاقة فى تمرين (١) أن

$$T(x,y) = T_1(x,y) + T_2(x,y) \qquad (x > 0, y > 0)$$

y
T = F₂(y)
T = F₁(x)
x

شكل (١٠٦)

حيث

$$T_1(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{|t-z|^2} - \frac{1}{|t+z|^2}\right)F_1(t)\,dt,$$

$$T_2(x,y) = \frac{x}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{|it-z|^2} - \frac{1}{|it+z|^2}\right)F_2(t)\,dt.$$

٥ – استنتج صيغة (٧) ببند (١٠٤) كحل لمسألة نويمان للمنطقة الخارجية لدائرة مستخدما في ذلك النتائج السابق الحصول عليها في هذا البند .

٦ – استنتج الحالة الخاصة الآتية من صيغة (٣) ببند (١٠٤) :

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [Q(r_0,r,\phi-\theta) - Q(r_0,r,\phi+\theta)]G(\phi)\,d\phi$$

لدالة U توافقية في المنطقة النصف دائرية $r < r_0, 0 < \theta < \pi$. والتي تحقق الشروط الحدية

$$U(r,0) = U(r,\pi) = 0 \qquad (r < r_0)$$

و

$$\lim_{r\to r_0} U_r(r,\theta) = G(\theta) \qquad (r < r_0, 0 < \theta < \pi)$$

لكل θ تكون عندها G متصلة ، وبفرض أن

$$\int_0^\pi G(\phi)\,d\phi = 0.$$

٨ – افرض أن T(x,y) ترمز لدرجات الحرارة المستقرة في صفيحة $x \geq 0, y \geq 0$، وجهاها معزولان و T=o على الحافة x=o، الفيض الحرارى عبر الصفيحة على امتداد القطعة المستقيمة $0 < x < 1$ من الحافة y=o يساوى مقدارا ثابتا A ، وبقية تلك الحافة معزولة . استخدم صيغة (٥) ببند (١٠٥) لإثبات أن الفيض الحرارى إلى خارج الصفيحة على امتداد الحافة x=o يساوى

$$\frac{A}{\pi}\,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{y^2}\right).$$

٩ – اثبت أن قلب بواسون يعطى بالمعادلة

$$P(\rho,r,\phi-\theta) = 2\rho\,\frac{\partial K}{\partial \rho} - 1.$$

حيث $K = K(z,w)$ هى دالة جرين التالية

$$K(z,w) = \text{Log}\,|z-w| = \tfrac{1}{2}\,\text{Log}\,[\rho^2 - 2\rho r\cos(\phi-\theta) + r^2],$$

حيث $w = \rho\exp(i\phi),\ z = r\exp(i\theta)$

١٠ - اثبت أن القلب المستخدم فى تحويلة تكامل شفارتز ببند (١٠٣) يمكن كتابته على الصورة

$$\frac{y}{|u-z|^2} = \frac{\partial K}{\partial y}\bigg]_{v=0} = -\frac{\partial K}{\partial v}\bigg]_{v=0}.$$

حيث K هى دالة جرين :

$$K(z,w) = \text{Log}\,|z-w| = \tfrac{1}{2}\,\text{Log}\,[(x-u)^2 + (y-v)^2],$$

حيث $z = x + iy$, $w = u + iv$، ومع اعتبار K دالة فى المتغيرات الحقيقية الأربعة x, y, u, v.



الفصل الثانى عشر

إفاضة فى نظرية الدوال

Further Theory of Functions

لقد قمنا فى الأبواب السابقة باستبعاد الكثير من المباحث – فى نظرية الدوال – التى لم تكن أساسية لاتصال تسلسل العرض فى حينه . ومع هذا فإن عددا لا بأس به من هذه المباحث لابد وأن يحتل مكانا ما فى أى مقرر تمهيدى وذلك بسبب أهميتها العامة وسنقوم بإدراج هذه المباحث فى هذا الباب .

(أ) إمتداد تحليلى Analytic Continuation

سنستعرض أولا كيف أن سلوك دالة توافقية فى نطاق ما يتعين تماماً بسلوكها فى فئة أصغر محتواة فى هذا النطاق . بعد ذلك سنطرق مسألة مد نطاق تعريف دالة تحليلية .

١٠٦ – الشروط التى فى ظلها يكون $f(z) \equiv 0$

Conditions under which $f(z) \equiv 0$

فى بند (٦٦) أثبتنا أن أصفار أى دالة تحليلية تكون معزولة إلا إذا انعدمت الدالة تطابقيا . أى أنه ، عندما تكون دالة f تحليلية عند نقطة ما z_0 ، فإنه يوجد جوار $|z - z_0| < \varepsilon$ بحيث تكون $f(z) \equiv 0$ على هذا الجوار بأكمله أو أن لا يكون للدالة f أصفار فى هذا الجوار فيما عدا ربما عند النقطة z_0 نفسها .

افرض الآن أن z_0 نقطة تراكم فئة لا نهائية وأن $f(z) = 0$ عند كل نقطة z تنتمى لهذه الفئة . إذن كل جوار للنقطة z_0 يحوى صفرًا من أصفار f مختلف عن النقطة z_0 نفسها ، وإذا كانت f تحليلية عند z_0 ، فلابد وأن يوجد جوار ما للنقطة z_0 بحيث $f(z) \equiv 0$ عند كل نقطة z من نقط الجوار . جميع المعاملات $f(z_0)$ و $f^{(n)}(z_0)/n!$ حيث $n = 1, 2, 3, \ldots$ ، فى مفكوك تايلور للدالة $f(z)$ حول z_0 تكون بالتالى مساوية للصفر . وبالتالى إذا كانت

الدالة f تحليلية على داخلية دائرة ما $|z - z_0| = r_0$ ، فإنه ينتج أن $f(z) \equiv 0$ فى القرص المفتوح $|z - z_0| < r_0$.

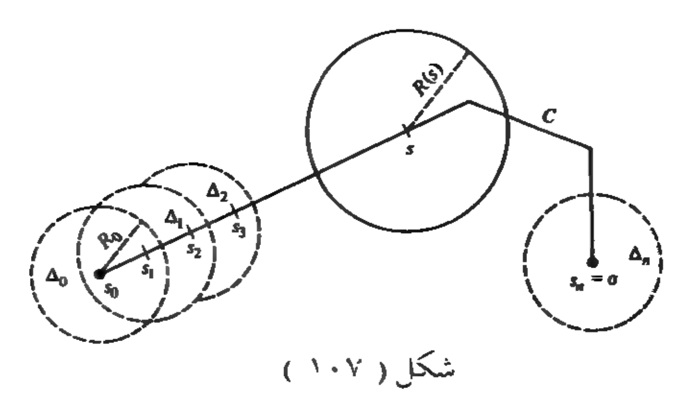
وعلى سبيل الخصوص ، إذا كانت $f(z) = 0$ عند كل نقطة z فى نطاق ما يحوى z_0 ، أو عند كل نقطة من نقاط **قوس** يحوى z_0 ، وإذا كانت f تحليلية فى قرص مفتوح $|z - z_0| < r_0$ فإن f(z) تنعدم تطابقيا على هذا القرص المفتوح .

سنقدم الآن النتيجة الأساسية لهذا البند .

نظرية : إذا كانت f دالة تحليلية على نطاق D وكانت $f(z) = 0$ عند كل نقطة z من نقاط نطاق أو قوس يقع داخل D ، فإن $f(z) = 0$ عند كل نقطة من نقاط D .

سنبرهن هذه النظرية أولا فى حالة ما إذا كانت $f(z) = 0$ عند كل نقطة z من نقاط نطاق D_0 يقع داخل D . افرض أن s_0 أى نقطة من نقاط D_0 وإفرض أن σ أى نقطة تنتمى للنطاق D ولا تنتمى للنطاق D_0 . حيث أن النطاق يكون دائماً مترابط ، فإنه يوجد مسار مضلعى C ، يتكون من عدد محدود من القطع المستقيمة المتصلة نهاية بنهاية ، ويقع بأكمله فى النطاق D ويصل النقطة s_0 بالنقطة σ (شكل (١٠٧)) .

الآن الدالة التحليلية f لها مفكوك على صورة متسلسلة تايلور حول كل نقطة s من نقاط C ، ونصف قطر دائرة التقارب يكون عددا موجبا ما R(s) . ومع هذا ، سنتفق على أن نكتب $R(s) = 1$ حينما يكون نصف القطر هذا أكبر من الواحد ، أى أن $0 < R(s) \leqq 1$. بالطبع قد تمتد دائرة ما $|z - s| = R(s)$ فيما وراء D .



شكل (١٠٧)

من أجل برهان ما تبغيه سنكون فى حاجة إلى حقيقة أن R دالة متصلة فى s . للوصول لتلك الحقيقة ، إفرض أن s أى نقطة من نقاط C وأفرض أن $s + \Delta s$ نقطة ما على C قريبة قربا كافيا من s بحيث $|\Delta s| < R(s)$. من هذا ينتج أن f تكون تحليلية فى القرص المفتوح

$$|z-(s+\Delta s)| < R(s) - |\Delta s|$$

الذى مركزه النقطة $s+\Delta s$ (شكل (١٠٨)) . ولكن قد تكون f تحليلية فى الحقيقة فى قرص مفتوح أكبر مركزه عند $s+\Delta s$ إذن $R(s+\Delta s) \geqq R(s) - |\Delta s|$ ، أو

$$-[R(s+\Delta s) - R(s)] \leqq |\Delta s|. \qquad (١)$$

إذا كان $R(s+\Delta s) \leqq R(s)$ ، فإنه يمكن كتابة المتباينة (١) على الصورة

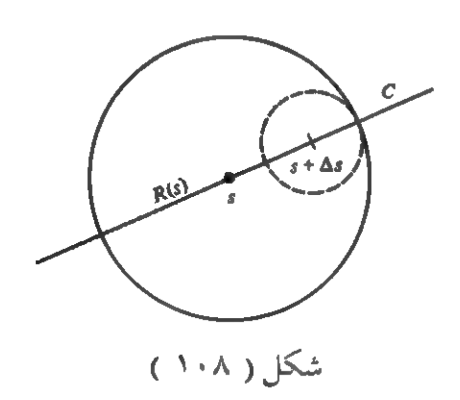
$$|R(s+\Delta s) - R(s)| \leqq |\Delta s|. \qquad (٢)$$

من ناحية أخرى ، إفرض أن $R(s+\Delta s) > R(s)$. لاحظ أنه إذا كانت z نقطة واقعة فى القرص المفتوح

$$|z-s| < R(s+\Delta s) - |\Delta s|, \qquad (٣)$$

فإن

$$|z-(s+\Delta s)| \leqq |z-s| + |\Delta s| < R(s+\Delta s).$$



شكل (١٠٨)

الدالة f تكون إذن تحليلية عند z وذلك لأن هذه النقطة تقع داخل دائرة التقارب حول $s+\Delta s$. وبالتالى ، فإن القرص المفتوح (٣) يكون محتوى فى القرص المفتوح $|z-s| < R(s)$. أى أن ، $R(s+\Delta s) - |\Delta s| \leqq R(s)$ ، ومرة أخرى تتحقق المتباينة (٢) .

بإستخدام المتباينة (٢) ، نرى أن $|R(s+\Delta s) - R(s)|$ يكون أقل من أى عدد موجب ε عندما يكون $|\Delta s|$ أقل من كل من ε و $R(s)$. أى أن

$$\lim_{\Delta s \to 0} R(s+\Delta s) = R(s)$$

وبهذا يكون قد اكتمل اثبات أن R متصلة عند s .

عند إعطاء تمثيل بارامترى $a \leqq t \leqq b,\ z = z(t)$ ، للكفاف C ، فإنه يمكن اعتبار

R دالة ذات قيم حقيقية $R[z(t)]$ لمتغير حقيقي وأنها تكون متصلة وموجبة على فترة مغلقة محدودة . من هذا ينتج أن الدالة R يكون لها إذن قيمة صغرى موجبة R_0 . إذن الدالة f تكون تحليلية فى القرص المفتوح $|z - s_0| < R_0$، الذى سنرمز له بالرمز Δ_0 . حيث أن $f(z)=0$ عند كل نقطة فى النطاق D_0 الذى يحوى s_0 ، فإنه ينتج أن $f(z)=0$ عند كل نقطة z فى القرص المفتوح Δ_0 . وهذا ينتج من الملاحظات التى ذكرناها سابقة لمنطوق النظرية .

إفرض أن $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n = \sigma$ متتابعة من نقط C بحيث

$$\tfrac{1}{2}R_0 \leqq |s_j - s_{j-1}| < R_0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

كما هو موضح بشكل (١٠٧) ، يوجد حول كل نقطة s_j قرص مفتوح Δ_j نصف قطره R_0 تكون f تحليلية عليه . حيث أن المركز s_1 للقرص المفتوح Δ_1 يقع فى النطاق Δ_0 الذى تكون $f(z)$ مساوية للصفر عليه ، فإنه ينتج أن $f(z)=0$ على Δ_1. بالمثل ، يقع مركز القرص المفتوح Δ_2 فى النطاق Δ_1 ، وبالتالى فإن $f(z)=0$ على Δ_2 . بالاستمرار على هذا المنوال ، فإننا سنصل حتما إلى Δ_n ونجد أن $f(\sigma) = 0$. بهذا يكتمل برهان النظرية فى الحالة التى يكون فيها $f(z)=0$ عند كل نقطة من نقاط نطاق D_0 محتوى فى داخلية النطاق D .

افرض الآن أن $f(z)=0$ على امتداد قوس فى D . إذن يوجد قرص مفتوح ، أو نطاق ، محتوى فى داخلية D حول أى نقطة على القوس ، وبمراعاة الملاحظات التى ذكرناها سابقة لمنطوق النظرية . نجد بسهولة أن $f(z)=0$ على هذا القرص المفتوح . إذن ، نتيجة للحالة التى أكملنا برهانها فى التو ، يمكننا أن نستخلص أن $f(z)=0$ عند كل نقطة من نقاط D .

١٠٧ – ثبات الصيغ للمتطابقات الدالية

Permanence of Forms of Functional Identities

افرض أن g,f دالتان تحليليتان فى نفس النطاق D وأن $f(z)=g(z)$ عند كل نقطة z من نقاط نطاق أو قوس محتوى فى D . الدالة h المعرفة على أنها $h(z)= f(z)- g(z)$ تكون أيضاً تحليلية فى D ، كما أن $h(z)=0$ على النطاق الجزئى أو على امتداد القوس . إذن $h(z)=0$ على النطاق D بأكمله ، أى أن $f(z)=g(z)$ على النطاق D بأكمله . بهذا نكون قد أثبتنا النتيجة التالية .

نظرية ١ : الدالة التى تكون تحليلية فى نطاق D تعين بصورة وحيدة على D بواسطة قيمها على نطاق ، أو على امتداد قوس ، محتوى فى داخلية D .

كمثال توضيحى ، الدالة e^z هى الدالة الوحيدة الشاملة التى يمكن أن تأخذ القيم e^x على امتداد قطعة من المحور الحقيقى . علاوة على ذلك ، فحيث أن e^{-z} تكون شاملة

وأن $e^x e^{-x} = 1$ طالما كان x عدد حقيقى ، فإن الدالة

$$e^z e^{-z} - 1$$

تكون شاملة وتأخذ قيما صفرية على امتداد المحور الحقيقى بأكمله . وبالتالى فإن

$$e^z e^{-z} - 1 = 0$$

عند جميع النقط ، وتتحقق المتطابقة $e^{-z} = 1/e^z$ لكل عدد مركب z .

ثبات الصيغ هذا لمتطابقات أخرى بين الدوال ، عند انتقالنا من متغير حقيقى إلى متغير مركب ، يمكن أن يبرهن بإتباع نفس الأسلوب . سنقصر اهتمامنا فى النظرية التالية على الفصل الهام من المتطابقات التى تحوى فقط كثيرات حدود فى الدوال .

نظرية ٢ : إفرض أن $P(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ كثيرة حدود فى n من المتغيرات w_j ، وافرض أن $f_j\ (j = 1, 2, \ldots, n)$ دوال تحليلية للمتغير z فى نطاق D يحوى فترة ما $a < x < b$ من محور السينات . إذا كانت الدوال f_j تحقق المتطابقة

$$P[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)] = 0, \tag{١}$$

على تلك الفترة ، فإن

$$P[f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)] = 0 \tag{٢}$$

على النطاق D بأكمله

الطرف الأيسر من معادلة (٢) يمثل دالة تحليلية للمتغير z فى النطاق المعطى ، وهو يساوى صفر على امتداد قوس فى هذا النطاق ، وذلك طبقا للمتطابقة (١) . إذن المتطابقة (٢) تتحقق على النطاق بأكمله .

لتوضيح هذه النظرية ، دعنا نعتبر كثيرة الحدود $P(w_1, w_2) = w_1{}^2 + w_2{}^2 - 1$ والدالتين الشاملتين $f_1(z) = \sin z$ و $f_2(z) = \cos z$ ، على المحور الحقيقى $P[f_1(x), f_2(x)] = \sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$. إذن ، $P[f_1(z), f_2(z)] = \sin^2 z + \cos^2 z - 1 = 0$ ، أو $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ على المستوى المركب z بأكمله

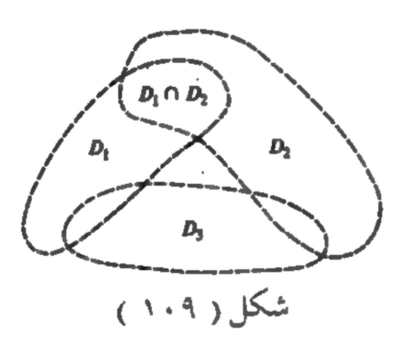
١٠٨ – وحدانية الامتداد التحليلى Uniqueness of Analytic Continuation

تقاطع Intersection نطاقين D_1 و D_2 هو النطاق $D_1 \cap D_2$ المكون من جميع النقط المشتركة بين كل من D_1 و D_2 . إذا وجدت نقط مشتركة بين النطاقين ، فإن **اتحادهما** Union $D_1 \cup D_2$ يتكون من جميع النقط التى تنتمى إلى D_1 أو D_2 ، ويكون $D_1 \cup D_2$ نطاقا أيضاً .

إذا كان لدينا نطاقين D_1 و D_2 بينهما نقط مشتركة (شكل (١٠٩)) ودالة f_1 تحليلية فى D_1 ، فإنه قد يوجد دالة f_2 تحليلية فى D_2 بحيث $f_2(z) = f_1(z)$ لكل نقطة من نقط

التقاطع $D_1 \cap D_2$. إذا تحقق ذلك فإننا نسمى f_2 **الامتداد التحليلى The analytic continuation** للدالة f_1 إلى النطاق D_2 .

إذا ما تحقق وجود هذا الامتداد التحليلى f_2 ، فإنه يكون وحيدا ، وذلك حسب نظرية (١) من البند السابق ، وذلك لعدم إمكانية تحقق وجود أكثر من دالة تحليلية فى D_2 تأخذ أيضاً القيمة $f_1(z)$ عند كل نقطة z تنتمى للنطاق $D_1 \cap D_2$ وتقع فى داخلية D_2 . بالرغم من ذلك ، إذا كان هناك امتداد تحليلى f_3 للدالة f_2 من النطاق D_2 إلى نطاق D_3 يتقاطع مع D_1 كما هو موضح بشكل (١٠٩) ، فليس من الضرورى أن يكون $f_3(z) = f_1(z)$ صحيحا لكل z تنتمى للنطاق $D_1 \cap D_3$. فى البند التالى سنوضح حقيقة أن هذه السلسلة من الامتدادات التحليلية لدالة معطاة من نطاق D_1 قد تؤدى إلى الحصول على دالة مختلفة معرفة على D_1 .



شكل (١٠٩)

إذا كان f_2 الامتداد التحليلى للدالة f_1 من نطاق D_1 إلى نطاق D_2 ، فإن الدالة F المعرفة كالتالى :

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{و} \quad z \in D_1, \\ f_2(z) & \text{و} \quad z \in D_2 \end{cases}$$

تكون تحليلية فى نطاق الاتحاد $D_1 \cup D_2$. الدالة F هى الامتداد التحليلى إلى $D_1 \cup D_2$ لأى من الدالتين f_1 أو f_2 ، وفى هذه الحالة يقال أن f_1 و f_2 **عناصر Elements** للدالة F .

١٠٩ – أمثلة

دعنا نعتبر أولا الدالة f_1 المعرفة بالمعادلة

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \qquad (١)$$

متسلسلة القوى المعطاة هنا تكون تقاربية إذا ، وفقط إذا ، كان $|z| < 1$. هذه المتسلسلة هى مفكوك ماكلورين للدالة $1/(1-z)$. إذن

$$f_1(z) = \frac{1}{1-z}$$

طالما كان $|z| < 1$ ، الدالة f_1 ليست معرفة عندما $|z| \geqq 1$.

الآن ، الدالة

$$f_2(z) = \frac{1}{1-z} \qquad (z \neq 1) \qquad (٢)$$

معرفة وتحليلية عند جميع النقط فيما عدا عند النقطة $z=1$ حيث أن $f_2(z) = f_1(z)$ داخل الدائرة $|z| = 1$ ، فإن الدالة f_2 تكون الامتداد التحليلى للدالة f_1 إلى النطاق المكون من جميع نقط المستوى المركب z عدا النقطة $z=1$. وهى الامتداد التحليلى الوحيد المحتمل للدالة f_1 إلى هذا النطاق ، وذلك حسب النتائج التى توصلنا إليها فى البند السابق . فى هذا المثال f_1 تكون أيضاً عنصرا للدالة f_2 .

من المفيد أن نلاحظ أنه إذا بدأنا بمعلومية أن متسلسلة القوى

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

تقاربية وأنها تمثل دالة تحليلية للمتغير z عندما $|z| < 1$ وأن مجموعها يساوى $1/(1-x)$ عندما $z=x$ فإنه يمكننا استنتاج أن مجموع هذه المتسلسلة هو $1/(1-z)$ طالما كان $|z| < 1$. هذا ينتج من حقيقة أن الدالة $1/(1-z)$ هى الدالة التحليلية على داخلية الدائرة $|z| = 1$ التى تأخذ القيم $1/(1-x)$ على امتداد القطعة المستقيمة من محور السينات الواقعة داخل الدائرة .

كمثال توضيحى آخر للامتداد التحليلى ، اعتبر الدالة

$$g_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt}\, dt \qquad (٣)$$

إجراء التكامل مباشرة يكشف النقاب عن أن التكامل (٣) يتحقق فقط عندما $\operatorname{Re} z > 0$ وأن

$$g_1(z) = \frac{1}{z} \qquad (٤)$$

نطاق التعريف $\operatorname{Re} z > 0$ رمز له بالرمز D_1 فى شكل (١١٠) ، الدالة g_1 تحليلية هناك .

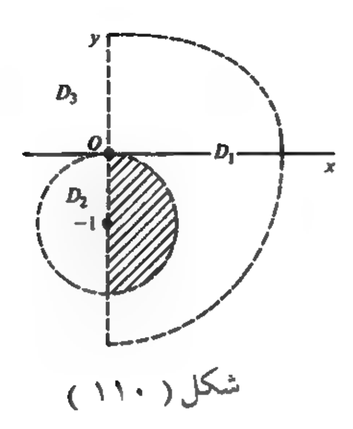
افرض أن g_2 معرفة بدلالة متسلسلة هندسية بالمعادلة

$$g_2(z) = i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{i}\right)^n \qquad ,|z+i| < 1 \qquad (٥)$$

داخل دائرة تقارب هذه المتسلسلة (أى دائرة الوحدة التى مركزها النقطة $z=-i$) ، تكون المتسلسلة تقاربية . إذن

$$g_2(z) = i\,\frac{1}{1-(z+i)/i} = \frac{1}{z} \qquad (٦)$$

عندما تنتمى z للنطاق $|z+i|<1$ ، الذى رمزنا له بالرمز D_2 . من الواضح أن $g_2(z)=g_1(z)$ لكل z تنتمى للتقاطع $D_1 \cap D_2$ ، أن g_2 هى الامتداد التحليلى للدالة g_1 إلى النطاق D_2 .



شكل (١١٠)

الدالة $G(z)=1/z$ ، حيث $z\neq 0$ ، هى الامتداد التحليلى لكل من g_2،g_1 إلى النطاقD_3 المكون من جميع نقط المستوى المركب z عدا نقطة الأصل . وبالتالى تكون الدالتين g_2،g_1 عناصر للدالة G .

أخيرا ، اعتبر الفرع التالى للدالة $z^{1/2}$:

$$h_1(z)=\sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2} \quad , \; r>0,\, 0<\theta<\pi \, .$$

الامتداد التحليلى h_2 عبر الجزء السالب من المحور الحقيقى إلى النصف السفلى للمستوى هو

$$h_2(z)=\sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2} \quad , \; r>0,\, \frac{\pi}{2}<\theta<2\pi \, .$$

الامتداد التحليلى للدالة h_2 عبر الجزء الموجب من المحور الحقيقى إلى الربع الأول من المستوى هو

$$h_3(z)=\sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2} \quad , \; r>0,\, \pi<\theta<\frac{5\pi}{2} \, .$$

لاحظ أن $h_3(z)\neq h_1(z)$ فى الربع الأول من المستوى ، وفى الحقيقة فإن $h_3(z)=-h_1(z)$ هناك .

١١٠ – مبدأ الانعكاس The Principle of Reflection

فى الباب الثالث وجدنا أن بعض الدوال البسيطة f(z) لها الخاصية $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$، والبعض الآخر منها ليس له هذه الخاصية . كأمثلة للدوال التى لها هذه الخاصية ، يمكننا أن نذكر الدوال

$$z, \qquad z^2+1, \qquad e^z, \qquad \sin z;$$

وذلك لأنه عند إحلال z بمرافقها المركب ، نجد أن قيمة كل من هذه الدوال تتغير إلى المرافق المركب للقيمة الأصلية . من ناحية أخرى ، الدوال

$$iz, \quad z^2 + i, \quad e^{iz}, \quad (1+i)\sin z$$

لا تحقق خاصية أن صورة z بالانعكاس بالنسبة للمحور الحقيقى تناظر صورة f(z) بالانعكاس بالنسبة للمحور الحقيقى .

النظرية التالية ، والتى تعرف باسم مبدأ **الانعكاس** **Reflection principle** ، تفسر هذه المشاهدات .

نظرية : افرض أن f دالة تحليلية فى نطاق ما D يحوى قطعة من محور السينات وأنها متماثلة بالنسبة لمحور السينات . إذا كانت f(x) حقيقية لكل نقطة x من نقط تلك القطعة ، فإن

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \tag{١}$$

لكل نقطة z تنتمى للنطاق D . وبالعكس ، إذا تحقق الشرط (١) فإن f(x) تكون حقيقية .

المعادلة (١) تمثل نفس الشرط على f المعطى بالمعادلة

$$\overline{f(\bar{z})} = f(z), \tag{٢}$$

حيث $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ و

$$\overline{f(\bar{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y). \tag{٣}$$

عندما يتحقق الشرط (٢) عند نقطة على المحور الحقيقى ، فإن

$$f(x) = u(x,0) + iv(x,0) = u(x,0) - iv(x,0);$$

وبالتالى فإن $v(x,0) = 0$ ، وتكون f(x) حقيقية . وبالتالى فإن التقرير العكسى فى النظرية يكون صحيحا .

لإثبات صحة التقرير المباشر فى النظرية ، سنبين أولا أن الدالة $\overline{f(\bar{z})}$ تحليلية على النطاق D . من أجل ذلك سنكتب

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})} = U(x,y) + iV(x,y).$$

إذن ، طبقا لمعادلة (٣) ،

$$U(x,y) = u(r,t), \qquad V(x,y) = -v(r,t) \tag{٤}$$

حيث $r = x$ و $t = -y$. حيث أن f(r+it) دالة تحليلية فى r+it ، فإنه ينتج أن الدالتين

$u(r,t)$ و $v(r,t)$ ، وكذلك مشتقاتهما الجزئية ، تكون متصلة على النطاق D ، كما أن معادلتي كوشي – ريمان

$$u_r = v_t, \qquad u_t = -v_r$$

تكون متحققة على نفس النطاق . الآن ، من معادلتي (٤) ، نجد أن

$$U_x = u_r, \qquad V_y = -v_t \frac{dt}{dy} = v_t$$

وبالتالي فإن $U_x = V_y$. بالمثل يمكننا إثبات أن

$$U_y = -V_x.$$

هذه المشتقات الجزئية للدالتين U,V جميعها متصلة ، وبالتالي تكون الدالة F تحليلية على النطاق D .

حيث أن f(x) حقيقية ، فإن $v(x,0) = 0$.إذن

$$F(x) = U(x,0) + iV(x,0) = u(x,0);$$

أي أن ، $F(z) = f(z)$ عندما تقع النقطة z على القطعة من محور السينات المحتواة فى النطاق D . من نظرية (١) ببند (١٠٧) ينتج إذن أن $F(z) = f(z)$ عند كل نقطة z من نقاط D حيث أن كل من الدالتين تكون تحليلية هناك . وبالتالى فإن الشرط (٢) يكون قد تحقق ، وبهذا يكتمل برهان النظرية .

تمـاريـــن

١ – بمعلومية أن دالتى الجيب الزائدى وجيب التمام الزائدى ، والدالة الأسية ، ودالتى الجيب وجيب التمام جميعها دوال شاملة ، استخدم نظرية (٢) ببند (١٠٧) للحصول على كل من المتطابقات التالية لجميع الأعداد المركبة z من المتطابقات المناظرة عندما تكون z حقيقية

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z \qquad ; \qquad \sinh z + \cosh z = e^z$$

$$\sin(\pi/2 - z) = \cos z \qquad ; \qquad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

٢ – اثبت أن الدالة

$$f_2(z) = \frac{1}{z^2+1} \qquad , \qquad z \neq \pm i$$

هى الامتداد التحليلى للدالة

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \qquad , \qquad |z| < 1$$

إلى النطاق المكون من جميع نقط المستوى المركب z عدا النقطتين $z = \pm i$.

٣ – اثبت أن الدالة $1/z^2$ تمثل الامتداد التحليلى للدالة المعرفة بالمتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n \qquad , \qquad |z+1| < 1.$$

إلى النطاق المكون من جميع نقط المستوى المركب z عدا النقطة $z=o$.

٤ – اذكر لماذا تكون الدالة

$$h_4(z) = \sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2} \quad , \quad r>0, -\pi<\theta<\pi$$

الامتداد التحليلى للدالة (انظر بند (١٠٩))

$$h_1(z) = \sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2} \quad , \quad r>0, 0<\theta<\pi$$

عبر الجزء الموجب من المحور الحقيقى إلى النصف السفلى للمستوى .

٥ – أوجد الامتداد التحليلى للدالة Log z من النصف العلوى $\operatorname{Im} z>0$ للمستوى إلى النصف السفلى للمستوى عبر الجزء السالب من المحور الحقيقى . لاحظ أن هذا الامتداد التحليلى يختلف عن Log z فى نصف المستوى السفلى .

الإجابة : $\operatorname{Log} r + i\theta$ حيث $r>0$ ، $0<\theta<2\pi$.

٦ – أوجد الامتداد التحليلى للدالة

$$f(z) = \int_0^\infty te^{-zt}\,dt \qquad \operatorname{Re} z>0$$

إلى النطاق المكون من جميع نقط المستوى المركب z عدا نقطة الأصل .

الإجابة : $1/z^2$.

٧ – اثبت أن الدالة $1/(z^2+1)$ هى الامتداد التحليلى للدالة

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\sin t\,dt \quad , \quad \operatorname{Re} z>0$$

إلى النطاق المكون من جميع نقط المستوى المركب z عدا النقطتين $z=\pm i$.

٨ – اثبت أنه إذا أحللنا الشرط أن $f(x)$ تكون حقيقية فى النظرية ببند (١١٠) بالشرط أن f(x) تكون تخيلية فإن النتيجة تتغير إلى $f(\bar{z}) = -\overline{f(z)}$.

٩ – افرض أن S ترمز لفئة من نقط نطاق D بحيث يكون للفئة S نقطة تراكم فى D . عمم نظرية (١) ببند (١٠٧) بإثبات أن أى دالة تحليلية فى D تعين بصورة وحيدة بقيمها على الفئة S .

(ب) النقط الشاذة والأصفار Singular Points and Zeros

سنقوم الآن بدراسة إضافية لسلوك الدوال بالقرب من نقطها الشاذة .

١١١ – الأقطاب والأصفار Poles and Zeros

لقد أوضحنا ببند (٧٠) أنه إذا كان z_0 قطب من أى درجة لدالة f ، فإن

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty; \tag{١}$$

أى أنه لكل عدد موجب ε يوجد عدد موجب δ بحيث

$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{طالما كان} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \tag{٢}$$

كنتيجة لهذا ، يوجد دائماً جوار ما للقطب لا يحوى أى أصفار للدالة f .

حيث أن الأقطاب هى نقط شاذة معزولة ، فينتج أنه **إذا كان z_0 قطب لدالة f ، فإنه يوجد جوار للنقطة z_0 لا يحوى أى أصفار للدالة f أو أى نقط شاذة للدالة f فيما عدا النقطة z_0 نفسها .**

وطبقا تمرين (١٢) ببند (٧١) ، إذا كان z_0 صفرا رتبته m لدالة f(z) ، فإن z_0 يكون قطبا من درجة m للدالة الكسرية $1/f(z)$. عكس هذه النتيجة يمكن أن يبرهن بسهولة . وذلك لأنه إذا كان z_0 قطب من درجة m لدالة g(z) ، فإن الدالة $(z - z_0)^m g(z)$ يكون لها نقطة شاذة مزالة عند z_0 . القيمة المعينة للدالة الأخيرة عند z_0 بحيث تكون الدالة الناتجة تحليلية فى قرص مفتوح $|z - z_0| < r_0$ حول z_0 لابد وأن تكون مختلفة عن الصفر . إذا كان ϕ يرمز لتلك الدالة التحليلية ، فإن

$$\phi(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \text{طالما كان} \quad 0 < |z - z_0| < r_0 \tag{٣}$$

و

$$\phi(z_0) \neq 0.$$

الآن ، الدالة $1/\phi(z)$ تحليلية عند z_0 ، ولعدد موجب ما r_1 تمثل بمتسلسلة تايلور

$$\frac{1}{\phi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (|z - z_0| < r_1),$$

حيث $r_1 \leq r_0$ و $a_0 = 1/\phi(z_0) \neq 0$. من معادلة (٣) ينتج أن

$$\frac{1}{g(z)} = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (|z - z_0| < r_1). \tag{٤}$$

إذن ، إذا كان z_0 قطب من درجة m لدالة g(z) ، فإن z_0 تكون صفرا رتبته m للدالة $1/g(z)$.

كتباين للشرط (٢) ، افرض أن f(z) دالة محدودة وتحليلية فى نطاق $0 < |z - z_0| < \delta$. إذن تتحقق النظرية التالية التى وضعها ريمان **Riemann** .

نظرية : إذا كانت f دالة محدودة وتحليلية على نطاق $0 < |z - z_0| < \delta$ فإنه إما أن تكون f تحليلية عند z_0 أو أن تكون z_0 نقطة شاذة مزالة للدالة f .

لإثبات ذلك ، لاحظ أن f(z) تمثل بمتسلسلة لوران فى النطاق المعطى حول z_0 . إذا

كان C يرمز لدائرة $|z - z_0| = r$ ، حيث $r < \delta$ ، فإن المعاملات b_n للحدود $1/(z - z_0)^n$ فى تلك المتسلسلة هى (بند (٥٩))

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{-n+1}} = \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})e^{in\theta}\,d\theta,$$

حيث $n = 1, 2, \ldots$. حيث أن f محدودة ، فإنه يوجد عدد حقيقى موجب M بحيث

$$|f(z)| < M \qquad (0 < |z - z_0| < \delta);$$

إذن

$$|b_n| < Mr^n.$$

ولكن المعاملات تكون ثوابت ، وحيث أن r يمكن اختيارها صغيرة بدرجة كافية ، فإن $b_n = 0\,(n = 1, 2, \ldots)$ وبالتالى تؤول متسلسلة لوران للدالة f(z) إلى متسلسلة قوى

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad (0 < |z - z_0| < \delta).$$

إذا عرفنا $f(z_0)$ على أنه العدد a_0 ، فإنه ينتج أن f تكون تحليلية عند z_0 . وهذا يكمل برهان النظرية .

١١٢ – النقط الشاذة الأساسية Essential Singular Points

سلوك دالة ما بالقرب من نقطة شاذة أساسية لها يكون غير منتظم بدرجة كبيرة . وقد سبق الإشارة إلى هذا ببند (٦٩) عند ذكرنا لنظرية بيكار التى تنص على : **فى أى جوار لنقطة شاذة أساسية لدالة ما تأخذ الدالة كل قيمة محدودة ، مع استثناء وحيد محتمل ، عددا لانهائيا من المرات** . وقد أوضحنا أيضاً نظرية بيكار بتبيان أن الدالة $\exp(1/z)$، حيث نقطة الأصل نقطة شاذة أساسية لها ، تأخذ القيمة -1 عددا لا نهائيا من المرات فى أى جوار لتلك النقطة الشاذة . ولن نقوم بإثبات نظرية بيكار ، ولكننا سنقوم بإثبات نظرية ذات صلة بنظرية بيكار وقد وضعها العالم ڤاير شتراس Weierstrass . هذه النظرية توضح أن قيمة دالة ما تكون قريبة اختياريا من أى عدد c معين سلفا عند نقط قريبة اختياريا من نقطة شاذة أساسية لتلك الدالة .

نظرية : افرض أن z_0 نقطة شاذة أساسية لدالة f وأن c أى عدد مركب معطى . إذن لكل عدد موجب ε ، مهما بلغ صغره ، تتحقق المتباينة

$$|f(z) - c| < \varepsilon \qquad (١)$$

عند نقطة ما z مختلفة عن z_0 فى كل جوار للنقطة z_0 .

لإثبات النظرية ، افرض أن الشرط (١) ليس متحققا عند أى نقطة من نقاط جوار $|z - z_0| < \delta$ حيث δ صغير صغرا كافيا لأن تكون f تحليلية فى النطاق $0 < |z - z_0| < \delta$. إذن $|f(z) - c| \geqq \varepsilon$ لجميع نقط هذا النطاق ، وتكون الدالة

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c} \qquad (0 < |z - z_0| < \delta) \tag{٢}$$

تحليلية ومحدودة هناك . طبقا لنظرية ريمان (بند (١١١)) تكون z_0 نقطة شاذة مزالة للدالة g . إفرض أننا عرفنا $g(z_0)$ بحيث تكون g تحليلية عند z_0 . حيث أن f لا يمكن أن تكون دالة ثابتة ، فإن g لا يمكن أن تكون كذلك أيضاً ، وبالتالى ، إذا ما أخذنا فى الاعتبار مفكوك تايلور للدالة g عند z_0 ، إما أن يكون $g(z_0) \neq 0$ أو أن يكون للدالة g صفر ذى رتبة نهائية عند z_0 . وبالتالى ، فإن الدالة

$$\frac{1}{g(z)} = f(z) - c,$$

إما أن تكون تحليلية عند z_0 أو أن يكون لها قطب هناك . ولكن هذا يناقض الفرض أن z_0 نقطة شاذة أساسية للدالة f . إذن الشرط (١) لابد وأن يكون متحققا عند نقطة ما من نقط الجوار المعطى .

١١٣ – عدد الأصفار والأقطاب The Number of Zeros and Poles

يمكن تعميم خواص المشتقة اللوغاريتمية التى حصلنا عليها بتمرينى (١٣) و (١٤) بند (٧١) .

افرض أن دالة ما f تكون تحليلية عند نقط كفاف مغلق بسيط C ونقاط داخليته ، فيما عدا ربما عند عدد محدود من الأقطاب التى تنتمى لداخلية C . كذلك ، إفرض أن f ليس لها أى أصفار على C ولها على الأكثر عدد محدود من الأصفار التى تنتمى لداخلية C . إذن ، إذا كان C موجها فى الاتجاه الموجب ،

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P \tag{١}$$

حيث N العدد الكلى لأصفار الدالة f التى تنتمى لداخلية P,C العدد الكلى لأقطاب f التى تنتمى لداخلية C . ويجب التنويه إلى أن الصفر الذى رتبته m_0 يحصى m_0 من المرات ، والقطب الذى درجته m_p يحصى m_p من المرات .

لإثبات التقرير (١) ، سنثبت أن العدد الصحيح N-P يساوى مجموع بواقى الدالة $f'(z)/f(z)$ عند نقطها الشاذة داخل الكفاف المغلق البسيط C . هذه النقط الشاذة هى بالطبع أصفار وأقطاب الدالة f بداخلية C .

افرض أن z_0 صفر رتبته m_0 للدالة f . فى جوار ما للنقطة z_0 يمكننا أن نكتب

$$f(z) = (z - z_0)^{m_0} g(z) \tag{٢}$$

حيث g(z) دالة تحليلية فى ذاك الجوار و $g(z_0) \neq 0$. إذن

$$f'(z) = m_0(z - z_0)^{m_0 - 1} g(z) + (z - z_0)^{m} g'(z),$$

أو

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

حيث أن $g'(z)/g(z)$ تحليلية عند z_0 ، فإن الدالة $f'(z)/f(z)$ يكون لها قطب بسيط عند z_0 وباق هذا القطب يساوى m_0 . بذلك يكون مجموع بواق الدالة $f'(z)/f(z)$ عند جميع أصفار f بداخلية C مساويا للعدد الصحيح N .

إذا كان z_p قطب من درجة m_p للدالة f ، فإن الدالة

$$h(z) = (z - z_p)^{m_p} f(z) \tag{٣}$$

يمكن أن تعرف عند z_p بحيث تكون h تحليلية هناك ، وبالإضافة إلى ذلك ، تكون $h(z_p) \neq 0$ إذن فى جوار ما للنقطة z_p ، فيما عدا عند النقطة $z = z_p$ نفسها ، يكون

$$f(z) = (z - z_p)^{-m_p} h(z), \tag{٤}$$

و

$$f'(z) = -m_p(z - z_p)^{-m_p - 1} h(z) + (z - z_p)^{-m} h'(z).$$

إذن

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m_p}{z - z_p} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

والتى نرى منها أن $f'(z)/f(z)$ لها قطب بسيط عند z_p باقيه يساوى $-m_p$. إذن مجموع بواق الدالة $f'(z)/f(z)$ عند جميع أقطاب f بداخلية C يساوى العدد الصحيح $-P$. بذلك نكون قد اثبتنا صحة الصيغة (١) .

صورة ما لنظرية بولزانور-ڤايرشتراس **Bolzano-Weierstrass** المألوفة يمكن صياغتها كالتالى[١] . **كل فئة لا نهائية تنتمى كل نقطة من نقاطها لمنطقة مغلقة ومحدودة يكون لها نقطة تراكم واحدة على الأقل فى تلك المنطقة** . من الممكن إثبات هذه النظرية باختيار متتابعة لا نهائية $z_1, z_2, \ldots$ من نقط الفئة وتطبيق عملية المربعات العششية على تلك المتتابعة (هذه الطريقة سبق استخدامها بتمرين (١٣) ببند (٥٠)) .

---

(١) انظر ، على سبيل المثال ، كتاب **Advanced Calculus** تاليف آ. إى. تايلور ، و.ر. مان (A.E. Taylor, W.R. Mann) ، الطبعة الثانية ، ص ٥٤٥ و ٥٤٩ ، ١٩٧٢ .

طبقا لتلك النظرية ، فإنه يمكن استبعاد الشرط أن عدد الأصفار والأقطاب التى تنتمى لداخلية C يكون محدودا ، وهو الشرط الذى استخدم فى إثبات الصيغة (١) . لأن عدد الأصفار والأقطاب داخل الكفاف المغلق البسيط C لابد وأن يكون محدودا من أجل أن تكون الدالة f تحليلية عند جميع نقط C ونقط داخليته ، فيما عدا ربما للأقطاب داخل C ، وذلك حيث أن الأصفار والأقطاب تكون معزولة . وسنترك كتابة البرهان كتمرين للقارىء .

١١٤ – مبدأ السعة The Argument Principle

افرض أن C كفاف مغلق بسيط فى المستوى المركب z وموجها فى الاتجاه الموجب وأن f دالة تحليلية عند جميع نقاط C ونقاط داخليته ، فيما عدا ربما لأقطاب تنتمى لداخلية C . كذلك افرض أن f ليس لها أى أصفار على C . الصورة Γ للمنحنى C بالتحويلة $w=f(z)$ تكون كفاف مغلق فى المستوى المركب w (شكل (١١١)) . عندما تتحرك نقطة z على المنحنى C فى الاتجاه الموجب ، فإن صورتها w تتحرك على Γ فى اتجاه خاص يحدد توجيه المنحنى Γ .

حيث أن f ليس لها أصفار على C ، فبالتالى لا يمر الكفاف Γ بنقطة الأصل فى المستوى المركب w . افرض أن w_0 نقطة ثابتة على Γ وافرض أن ϕ_0 قيمة ما من قيم سعة w_0 . ثم افرض أن سعة w تتغير تغيرا متصلا ، بادئة بالقيمةϕ_0 ، عندما تبدأ النقطة w من عند w_0 وتتحرك على Γ مرة واحدة فى الاتجاه المحدد له بالراسم $w=f(z)$. عندما تعود w مرة أخرى لنقطة البداية w_0 ، تأخذ سعة w قيمة معينة من قيم سعة w_0 ، وسنرمز لهذه القيمة بالرمز ϕ_1 .إذن ، التغير فى سعة w عندما تقطع w المنحنى Γ مرة واحدة فى اتجاهه الدورانى يساوى $\phi_1 - \phi_0$ لاحظ أن هذا التغير لا يتوقف على النقطة الخاصة w_0 المختارة لتعيين التغير فى السعة .

العدد $\phi_1 - \phi_0$ هو أيضاً التغير فى سعة $f(z)$ عندما تقطع z المنحنى C مرة واحدة فى الاتجاه الموجب ، ونكتب

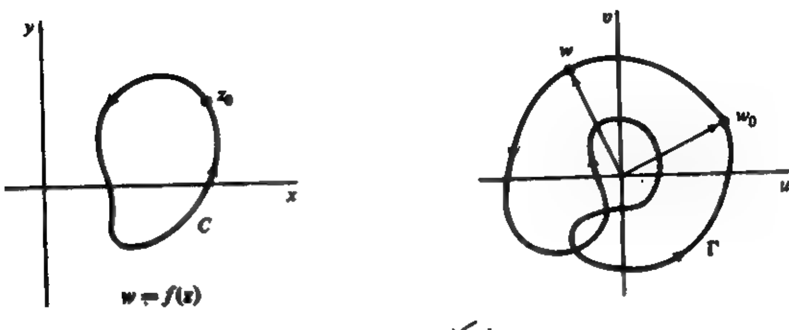
$$\Delta_C \arg f(z) = \phi_1 - \phi_0. \qquad (١)$$

قيمة المقدار $\Delta_C \arg f(z)$ مضاعف للعدد 2π ، والعدد الصحيح

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$$

يمثل عدد الدورات الكاملة التى تقطعها النقطة w حول نقطة الأصل فى المستوى المركب w عندما تقطع النقطة z المنحنى C مرة واحدة فى الاتجاه الموجب . فمثلا ، إذا كان هذا

العدد يساوى 1- فإن هذا يعنى أن Γ تدور حول نقطة الأصل مرة واحدة فى اتجاه عقرب الساعة .



شكل (١١١)

فى شكل (١١١) قيمة $\Delta_C \arg f(z)$ تساوى صفر . قيمة $\Delta_C \arg f(z)$ تساوى الصفر أيضاً عندما لا تحوى داخلية الكفاف Γ نقطة الأصل ،والتحقق من هذه الحقيقة لحالة خاصة سيترك للتمارين .

قيمة $\Delta_C \arg f(z)$ يمكن تعيينها من عدد أصفار وأقطاب الدالة f التى تنتمى لداخلية C .

نظرية ١ : افرض أن C كفاف مغلق بسيط موجها فى الاتجاه الموجب وافرض أن f دالة تحليلية لجميع نقاط C ونقاط داخليته ، فيما عدا ربما لأقطاب تنتمى لداخلية C . كذلك ، افرض أن الدالة f ليس لها أصفار على C . إذن

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) = N - P \qquad (٢)$$

حيث P,N عدد الأصفار وعدد الأقطاب على الترتيب للدالة f والتى تنتمى لداخلية C ، مع حساب تعدد كل منها .

برهاننا لهذه النتيجة المعروفة بمبدأ السعة يتأسس على الصيغة

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P \qquad (٣)$$

التى حصلنا عليها فى البند السابق . إذا كان $z = z(t)$ ، حيث $a \leqq t \leqq b$ ، تمثيلا بارامتريا للكفاف C ، فإن تمثيلا بارامتريا لصورته Γ بالتحويلة $w = f(z)$ يكون

$$w = w(t) = f[z(t)] \qquad (a \leqq t \leqq b).$$

الآن ، طبقاً لتمرين (٧) ببند (٤٣) ،

$$w'(t) = f'[z(t)]z'(t)$$

على امتداد كل من الأقواس الملساء التى يتكون منها الكفاف Γ.حيث أن $z'(t)$ و $w'(t)$

متصلتان قطعة بقطعة على الفترة $a \leqq t \leqq b$ ، فيمكننا أن نكتب

$$\int_a^b \frac{f'[z(t)]}{f[z(t)]} z'(t)\, dt = \int_a^b \frac{w'(t)}{w(t)}\, dt.$$

أى أن

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_\Gamma \frac{dw}{w}.$$

بذلك تؤول الصيغة (٢) إلى

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w} = N - P. \qquad (٤)$$

حيث أن Γ لا يمر إطلاقا بنقطة الأصل فى المستوى المركب w ، فيمكننا أن نعبر عن كل نقطة على هذا الكفاف بالصورة القطبية $w = \rho \exp(i\phi)$. فإذا ما عبرنا عن Γ بدلالة بارامتر τ على الصورة

$$w = w(\tau) = \rho(\tau) \exp[i\phi(\tau)] \qquad (c \leqq \tau \leqq d),$$

فإننا نحصل على المعادلة

$$w'(\tau) = \rho'(\tau) \exp[i\phi(\tau)] + \rho(\tau) \exp[i\phi(\tau)] i\phi'(\tau),$$

حيث $\rho'(\tau)$ و $\phi'(\tau)$ متصلتين قطعة بقطعة على الفترة $c \leqq \tau \leqq d.$. إذن ، يمكننا أن نكتب

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w} = \int_c^d \frac{w'(\tau)}{w(\tau)}\, d\tau = \int_c^d \frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)}\, d\tau + i\int_c^d \phi'(\tau)\, d\tau,$$

أو

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w} = \text{Log}\, \rho(\tau)\Big]_c^d + i\phi(\tau)\Big]_c^d.$$

ولكن $\rho(d) = \rho(c)$

$$\phi(d) - \phi(c) = \phi_1 - \phi_0 = \Delta_C \arg f(z).$$

إذن ،

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w} = i\Delta_C \arg f(z). \qquad (٥)$$

الصيغة (٢) يمكن استنتاجها الآن مباشرة من معادلتى (٤) و (٥) .

بعد ذلك سنقدم نتيجة مفيدة لمبدأ السعة ، وهذه النتيجة تعرف بنظرية روشيه Rouche .

نظرية ٢ : افرض أن كل من g,f دالة تحليلية عند جميع نقط كفاف مغلق بسيط C ونقاط داخليته ، حيث الكفاف C موجه فى الاتجاه الموجب .إذا كان $|f(z)|>|g(z)|$ عند كل نقطة z على C ، فإن الدالتين $f(z)$ و $f(z)+g(z)$ يكون لهما نفس عدد الأصفار داخل C ، مع حساب تعدد كل صفر .

لإثبات ذلك ، لاحظ أولا أن f(z) ليس لها أصفار على C ، وذلك حيث أن $0 \geqq |g(z)| > |f(z)|$ على C . علاوة على ذلك فإن

$$|f(z) + g(z)| \geqq |f(z)| - |g(z)| > 0$$

على C ، وبالتالى فإن الدالة $f(z) + g(z)$ ليس لها أيضاً أصفار على C . الآن

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) = N_f \tag{٦}$$

و

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg [f(z) + g(z)] = N_{f+g} \tag{٧}$$

حيث N_f عدد أصفار الدالة f(z) بداخلية C و N_{f+g} عدد أصفار الدالة $f(z) + g(z)$ بداخلية C . معادلتى (٦) و (٧) تنتجان مباشرة من مبدأ السعة وحقيقة أن كل من الدالتين $f(z)$ و $f(z) + g(z)$ ليس لها أقطاب بداخلية C . لاحظ أن

$$\Delta_C \arg [f(z) + g(z)] = \Delta_C \arg \left\{f(z)\left[1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right]\right\}$$
$$= \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right].$$

التحويلة $w = 1 + g(z)/f(z)$, ترسم الكفاف C إلى الكفاف Γ الذى يقع داخل الدائرة $|w - 1| = 1$ وذلك لأن $|w - 1| = |g(z)/f(z)| < 1$ على C إذن النقطة w = o لا تنتمى لداخلية المنحنى Γ ، وبذلك تساوى القيمة $\Delta_C \arg [1 + g(z)/f(z)]$ صفر . إذن ، $\Delta_C \arg [f(z) + g(z)] = \Delta_C \arg f(z)$ ويكون للدالة f(z) + g(z) نفس عدد أصفار الدالة f(z) بداخلية C ، وذلك طبقا لمعادلتى (٦) ، (٧) .

كتطبيق لنظرية روشيه ، دعنا نعين عدد جذور المعادلة $z^7 - 4z^3 + z - 1 = 0$ بداخلية الدائرة $|z| = 1$. اكتب $f(z) = -4z^3$ ، $g(z) = z^7 + z - 1,$ ولاحظ أن $|f(z)| = 4$ و $|g(z)| \leq 3$ عندما $|z| = 1$. بذلك تكون شروط نظرية روشيه متحققة . وبالتالى ، حيث أن f(z) لها ثلاث أصفار (لاحظ أننا حسبنا تعدد صفر الدالة) بداخلية الدائرة $|z| = 1$ يكون للدالة f(z) + g(z) بالمثل ثلاث أصفار بداخلية الدائرة $|z| = 1$. أى أن ، المعادلة $z^7 - 4z^3 + z - 1 = 0$ يكون لها ثلاث جذور تنتمى لداخلية الدائرة $|z| = 1.$

تمــاريــن

١ افرض أن c عدد مركب ثابت مختلف عن الصفر . اثبت أن الدالة exp (1/z) ، التى لها نقطة شاذة أساسية عند z = o ، تأخذ القيمة c عددا لا نهائيا من المرات فى أى جوار لنقطة الأصل .

اقتراح : اكتب $c = c_0 \exp(i\gamma)$ ، حيث $c_0 > 0$ ، وبين أن $\exp(1/z)$ تأخذ القيمة c عند النقط $z = r\exp(i\theta)$ حيث r ، θ تحققان المعادلات

$$r^2 = \frac{1}{\gamma^2 + (\mathrm{Log}\, c_0)^2},$$

$$\sin\theta = \frac{-\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + (\mathrm{Log}\, c_0)^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{\mathrm{Log}\, c_0}{\sqrt{\gamma^2 + (\mathrm{Log}\, c_0)^2}}.$$

لاحظ أنه يمكن جعل r صغيرة اختياريا وذلك بإضافة مضاعفات صحيحة للمقدار 2π إلى الزاوية γ ، ومع ترك c ثابتة .

٢ – إذا كانت f دالة تحليلية فى نطاق ما $0 < |z - z_0| < r_0$ وإذا كانت z_0 نقطة تراكم لأصفار الدالة ، فإنه إما أن تكون z_0 نقطة شاذة أساسية للدالة f أو أن تنعدم f(z) تطابقيا . برهن هذه النظرية بمساعدة النتائج السابق الحصول عليها ببندى (٦٦) و (١١١) .

٣ – اختبر فئة أصفار الدالة $z^2 \sin(1/z)$ وطبق النظرية الواردة بتمرين (٢) لإثبات أن نقطة الأصل تكون نقطة شاذة أساسية لهذه الدالة . لاحظ أن هذه النتيجة تنتج أيضاً من طبيعة متسلسلة لوران التى تمثل هذه الدالة فى النطاق $0 < |z|$

٤ – افرض أن C كفاف مغلق بسيط فى المستوى المركب z ، موجهاً فى الاتجاه الموجب ، وافرض أن w_0 أى عدد مركب معطى . افرض أن g دالة تحليلية عند جميع نقط C ونقاط داخليته ، وافرض أن $g'(z) \neq 0$ عند أى نقطة z بداخلية C . إذا كانت $g(z) \neq w_0$ عند أى نقطة z على C ، فإن

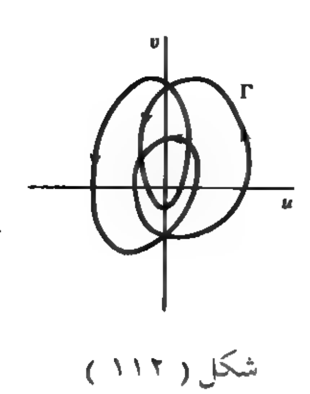
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g'(z)}{g(z) - w_0}\, dz = N$$

حيث العدد الصحيح N هو عدد النقط z بداخلية C التى يكون عندها $g(z) = w_0$. بين أن هذه النتيجة تنتج مباشرة من النتائج السابق الحصول عليها ببند (١١٣) . (قارن هذه النتيجة بتلك السابق الحصول عليها بتمرين (١٢) بند (٩٥)) .

٥ – اكمل البرهان (بند (١١٣)) ، المبنى على نظرية بلزانو – ڤايرشتراس ، أنه إذا كانت f دالة تحليلية عند جميع نقط كفاف مغلق بسيط C ونقط داخليته ، فيما عدا ربما لأقطاب بداخلية C ، وإذا كانت $f(z) \neq 0$ عند أى نقطة من نقط C ، فإن أصفار وأقطاب f بداخلية C تكون محدودة العدد وتكون الصيغة (١) ببند (١١٣) صحيحة .

٦ – افرض أن f دالة تحليلية عند جميع نقط كفاف مغلق بسيط C ونقط داخليته ، وافرض أن f(z) لا تساوى صفر على الإطلاق على C . افرض أن صورة C بالتحويلة $w = f(z)$ هى الكفاف المغلق Γ الموضح بشكل (١١٢) . باستخدام الكفاف Γ ، أوجد قيمة $\Delta_C \arg f(z)$. عين أيضاً عدد أصفار الدالة f بداخلية c .

الأجوبة : $6\pi; 3$



شكل (١١٢)

٧ - افرض أن C يرمز لدائرة الوحدة $|z|=1$ موجهة فى الاتجاه الموجب . أوجد قيمة $\Delta_C \arg f(z)$ للدالة

(أ) $f(z)=z^2$ ؛ (ب) $f(z)=\dfrac{z^3+2}{z}$.

أيضاً ، لكل من التحويلات $w=f(z)$ المعرفة بهاتين الدالتين ، اذكر عدد المرات التى تدور فيها النقطة الصورة w حول نقطة الأصل فى المستوى المركب w عندما تقطع النقطة z الكفاف C مرة واحدة فى الاتجاه الموجب .

الأجوبة : (أ) $4\pi, 2$ ؛ (ب) $-2\pi, -1$.

٨ - بإستخدام المفهوم الوارد ببند (١١٤) ، اثبت أنه عندما لا يحصر الكفاف Γ النقطة $w=o$ وعندما يوجد شعاع خارج من تلك النقطة ولا يتقاطع مع الكفاف Γ ، فإن $\Delta_C \arg f(z)=0$.

اقتراح : لاحظ أن التغير فى قيمة $\arg f(z)$ لابد وأن يكون أقل من 2π عدديا عندما تصنع z دورة واحدة كاملة حول C . ثم استخدم حقيقة أن $\Delta_C \arg f(z)$ مضاعف صحيح للمقدار 2π.

٩ - أوجد عدد أصفار كثير الحدود (أ) $z^6-5z^4+z^3-2z$ ؛ (ب) $2z^4-2z^3+2z^2-2z+9$ داخل الدائرة $|z|=1$.

الأجوبة : (أ) 4 (ب) صفر

١٠ - عين عدد جذور المعادلة $2z^5-6z^2+z+1=0$ فى المنطقة $1\leq|z|<2$.

الإجابة : ثلاثة جذور

١١ - اثبت أنه إذا كان c عدد مركب بحيث $|c|>e$ ، فإن المعادلة $cz^n=e^z$ يكون لها n من الجذور داخل الدائرة $|z|=1$.

١٢ - بإستخدام نظرية روشيه ، اثبت أن أى كثيرة حدود

$$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n \quad , \quad a_n\neq 0$$

حيث $n \geqq 1$ ، يكون لها بالضبط n من الجذور . من ثم اعطى برهان بديل للنظرية الأساسية للجبر (بند (٥٥)) .

اقتراح : لاحظ أنه يكفى أن نفرض أن $a_n = 1$. ثم ، بكتابة

$$f(z) = z^n, \qquad g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1},$$

اثبت أن p(z) لها n من الأصفار داخل دائرة $|z| = R$ حيثR أكبر من أى من العددين 1 و $|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$.لإثبات أن P(z) ليس لها أى أصفار أخرى ، بين أن

$$|z^n + g(z)| \geqq |z|^n - |g(z)| > 0$$

عندما $|z| \geqq R$.

(جـ) سطوح ريمان Riemann Surfaces

سطح ريمان هو تعميم المستوى المركب لسطح ذى أكثر من طية بحيث يكون للدالة المتعددة القيم قيمة وحيدة مناظرة لكل نقطة على هذا السطح . حال تصميم مثل هذا السطح لدالة معطاة ، تصبح الدالة وحيدة القيمة على السطح ويمكن تطبيق نظرية الدوال وحيدة القيمة هنا . وبالتالى فإن الصعوبات التى تظهر نتيجة كون الدالة متعددة القيم تخفف بإستخدام اختراع هندسى . بالرغم من ذلك ، فإن وصف هذه الأسطح وترتيب الترابطات المضبوطة بين الطيات من الممكن أن يصير متشابكا بصورة تشكل صعوبة . لذلك فإننا سنقصر اهتمامنا فقط على بعض الأمثلة المتناهية فى البساطة .

١١٥ – سطح ريمان للدالة log z

لكل عدد مركب غير صفرى z ، يكون للدالة المتعددة القيم

$$\log z = \operatorname{Log} r + i\theta$$

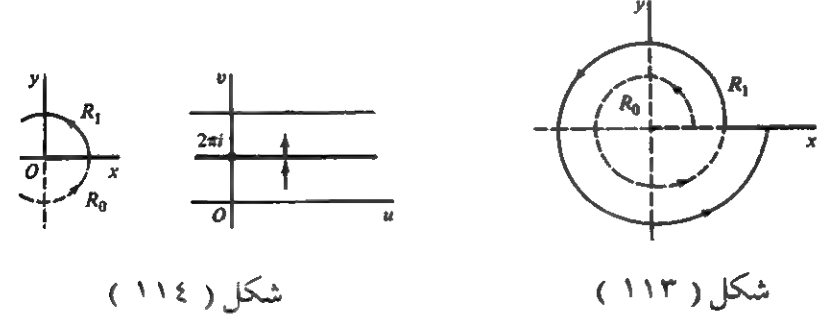
قيم مناظرة لا نهائية العدد . من أجل تصور Log z كدالة وحيدة القيمة ، فإننا نحلل المستوى المركب z ، بعد استبعاد نقطة الأصل ، بسطح تتحدد عليه دائماً نقطة جديدة كلما زادت أو نقصت سعة العدد المركب z بمقدار 2π أو مضاعفات صحيحة للمقدار 2π .

اعتبر المستوى المركب z بعد استبعاد نقطة الأصل كما لو كان صحيفة رقيقة (أو طية R_0) مشقوقة على امتداد الجزء الموجب من المحور الحقيقى . على تلك الطية افرض أن θ تأخذ القيم من صفر إلى 2π . افرض أن طيه ثانية R_1 شقت بنفس الأسلوب ووضعت أمام الصحيفة R_0 . بعد ذلك وصلت الشفة السفلى للشق فى R_0 بالشفة العليا للشق فى R_1 . على R_1 الزاوية θ تأخذ القيم من 2π إلى 4π ، وعلى ذلك فعند

تمثيل z بنقطة على R_1 فإن الجزء التخيلى للدالة log z يأخذ القيم من 2π إلى 4π .

بنفس الأسلوب نشق بعد ذلك طية ثالثة R_2 ونضعها أمام R_1 ، ونوصل الشفة السفلى للشق فى R_1 بالشفة العليا للشق فى هذه الطية الجديدة ، وهكذا نتابع هذه العملية بإضافة طيات جديدة $R_3, R_4, \ldots$. بنفس الأسلوب نشق طية أخرى نرمز لها بالرمز R_{-1} ونضعها خلف الطية R_0 ونعتبر أن الزاوية θ تأخذ القيم من -2π إلى صفر عليها ، ثم نوصل الشفة السفلى للشق فى R_{-1} بالشفة العليا للشق فى R_0 . وبالمثل نتابع هذه العملية بإضافة طيات جديدة $R_{-2}, R_{-3}, \ldots$ يمكن اعتبار الأحداثيين r, θ لنقطة ما على أى طية على أنها احداثيات قطبية لمسقط تلك النقطة على المستوى المركب الأصلى z ، حيث يقصر مدى الأحداثى الزاوى θ لمدى محدد قيمته 2π من الزوايا النصف قطرية على كل طية .

اعتبر أى منحنى متصل على هذا السطح المترابط المكون من عدد لا نهائى من الطيات (أو الصحف) . عندما تتحرك نقطة ما z على هذا المنحنى ، فإن قيم log z تتغير تغيرا متصلا حيث أن θ ، بالإضافة إلى r ، تتغير الآن تغيرا متصلا ، وتأخذ log z قيمة واحدة فقط مناظرة لكل نقطة على المنحنى . فمثلا ، عندما تصنع النقطة دورة كاملة حول نقطة الأصل على الطية R_0 على امتداد المسار الموضح بشكل (١١٣) فإن الزاوية تتغير من صفر إلى 2π . عندما تجتاز النقطة الخط المستقيم $\theta = 2\pi$ فإنها تنتقل إلى الطية R_1 من السطح . عندما تكمل النقطة دورة كاملة فى R_1 ، تتغير الزاوية θ من 2π إلى 4π ، وعندما تجتاز الخط المستقيم $\theta = 4\pi$ فإنها تنتقل إلى الطية R_2 .



شكل (١١٤)　　　　شكل (١١٣)

السطح الذى وصفناه هنا هو سطح من سطوح ريمان للدالة log z . وهو سطح مترابط يتكون من عدد لا نهائى من الطيات مرتبة بحيث تكون log z دالة وحيدة القيمة للنقط الواقعة عليه .

التحويلة $w = \log z$ راسم أحادى لسطح ريمان بأكمله فوق المستوى المركب w بأكمله . صورة الطية R_0 هى الشريحة $0 \leqq v \leqq 2\pi$. عندما تتحرك نقطة z فوق

الطية R_1 على امتداد القوس الموضح بشكل (١١٤) ، تتحرك صورتها w إلى أعلى عبر الخط المستقيم $v = 2\pi$ ، كما هو موضح بالشكل .

لاحظ أن الدالة log z المعرفة على الطية R_1 تمثل الامتداد التحليلى للدالة التحليلية وحيدة القيمة

$$\text{Log}\, r + i\theta \qquad (0 < \theta < 2\pi)$$

إلى أعلى عبر الجزء الموجب من المحور الحقيقى . بهذا المفهوم ، لا تكون log z دالة وحيدة القيمة فحسب لجميع النقط z على سطح ريمان ولكنها تكون أيضاً دالة تحليلية عند جميع النقط هناك .

بالطبع ، من الممكن أن تكون الطيات مشقوقة على امتداد الجزء السالب من المحور الحقيقى ، أو على امتداد أى شعاع آخر يبدأ من نقطة الأصل ، وموصلة كما يجب على امتداد الشقوق لتكون سطح آخر من سطوح ريمان للدالة log z .

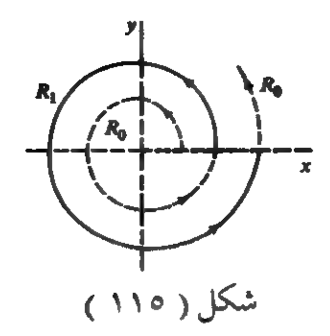
١١٦ - سطح ريمان للدالة $z^{1/2}$

كل نقطة مختلفة عن نقطة الأصل ، من نقط المستوى المركب z،يناظرها قيمتان للدالة

$$z^{1/2} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) .$$

يمكن الحصول على سطح من سطوح ريمان للدالة $z^{1/2}$ بإحلال المستوى المركب z بسطح مكون من طيتين R_1, R_0 ، كل منهما مقطوعة على امتداد الجزء الموجب من المحور الحقيقى مع وضع R_1 أمام R_0 . الشفة السفلى للشق فى R_0 توصل بالشفة العليا للشق فى R_1 ، وتوصل الشفة السفلى للشق فى R_1 بالشفة العليا للشق فى R_0 .

عندما تبدأ نقطة z فى التحرك من الشفة العليا للشق فى R_0 وتقطع دائرة متصلة حول نقطة الأصل فى الاتجاه المضاد لعقرب الساعة (شكل (١١٥)) تزداد الزاوية θ من صفر إلى 2π . بعد ذلك تعبر النقطة من الطية R_0 إلى الطية R_1 حيث تزداد θ من 2π إلى 4π . إذا ما استمرت النقطة فى حركتها أكثر من ذلك فإنها تعبر عائدة مرة أخرى للطية R_0 حيث يمكن أن تتغير قيم θ من 4π إلى 6π أو من صفر إلى 2π ، وهذا الاختيار أو ذاك لا يؤثر على قيمة $z^{1/2}$ ، إلخ . لاحظ أن قيمة $z^{1/2}$ عند نقطة تعبر عندها الدائرة من الطية R_0 إلى الطية R_1 تكون مختلفة عن قيمة $z^{1/2}$ عند نقطة تعبر عندها الدائرة من الطية R_1 إلى الطية R_0 .



شكل (١١٥)

بهذا نكون قد صممنا سطح من سطوح ريمان تكون عليه الدالة $z^{1/2}$ وحيدة القيمة لكل عدد غير صفرى z . فى هذا التصميم توصل شفاه الطيتين R_1,R_0 كأزواج بحيث يكون السطح المتولد مغلق ومترابط . النقط التى يوصل عندها زوج من الشفاه تكون مختلفة عن النقط التى يوصل عندها الزوج الثانى من الشفاه . من هذا نرى أنه من المستحيل فيزيائيا بناء نموذج لسطح ريمان هذا . عند تخيل سطح من سطوح ريمان ، من المهم أن نفهم جيدا كيف نتقدم عندما نصل إلى شفة لشق .

نقطة الأصل نقطة خاصة جدا على سطح ريمان هذا . هذه النقطة مشتركة بين الطيتين ، وأى منحنى على السطح حول نقطة الأصل لابد وأن يدور دورتين كاملتين حول نقطة الأصل لكى يكون منحنى مغلق . أى نقطة من هذا النوع على سطح ريمان تسمى نقطة تفرع .

صورة الطية R_0 بالتحويلة $w = z^{1/2}$ هى النصف العلوى من المستوى المركب w وذلك حيث أن سعة w تساوى $\theta/2$ و $0 \leqq \theta/2 \leqq \pi$ على R_0 . بالمثل ، صورة الطية R_1 بنفس التحويلة هى النصف السفلى من المستوى المركب w . الدالة المعرفة على أى من الطيتين تكون الامتداد التحليلى ، عبر الشق ، للدالة المعرفة على الطية الأخرى . من هذه الوجهة ، تكون الدالة وحيدة القيمة $z^{1/2}$ للنقط على سطح ريمان وتحليلية عند جميع النقط فيما عدا عند نقطة الأصل .

١١٧ - سطوح لدوال غير قياسية أخرى

دعنا نصف سطح من سطوح ريمان للدالة الثنائية القيمة

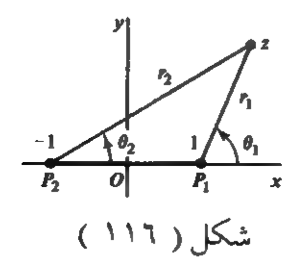
$$f(z) = (z^2 - 1)^{1/2} = \sqrt{r_1 r_2}\, \exp\left(i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \qquad (1)$$

حيث $z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1),\ z + 1 = r_2 \exp(i\theta_2)$ كما هو موضح بشكل (١١٦) . لقد سبق أن وصفنا ببند (٣٧) فرع لهذه الدالة ، حيث القطعة المستقيمة P_1P_2 الواصلة بين نقطتى

التفرع $z = \pm 1$ فرع قاطع له . هذا الفرع يعطى بالصيغة (١) مع الاشتراطات $r_1 > 0,\quad r_2 > 0,\quad r_1 + r_2 > 2,\quad 0 \leqq \theta_k < 2\pi ,\quad (k = 1, 2)$. الفرع لا يكون معرفا على القطعة المستقيمة P_1P_2

أى سطح من سطوح ريمان للدالة الثنائية القيمة (١) لابد وأن يتكون من طيتين R_1, R_0 . افرض أن كلتى الطيتين قد شقتا على امتداد القطعة المستقيمة P_1P_2. الشفة السفلى للشق فى R_0 توصل بالشفة العليا للشق فى R_1 ، كما أن الشفة السفلى للشق فى R_1 توصل بالشفة العليا للشق فى R_0 .

على الطية R_0 افرض أن كل من الزاويتين θ_1 , θ_2 تأخذ القيم من الصفر إلى 2π . إذا تحركت نقطة على الطية R_0 لترسم منحنى مغلق بسيط ، يحوى بداخله القطعة المستقيمة P_1P_2 ، مرة واحدة فى الاتجاه المضاد لعقرب الساعة ، فإن كل من θ_1 و θ_2 تتغير بمقدار 2π لدى عودة النقطة لوضعها الابتدائى . التغير فى $(\theta_1 + \theta_2)/2$ يساوى أيضاً 2π ، وبالتالى لا تتغير قيمة f . إذا رسمت نقطة بادئة حركتها على الطية R_0 مسارا يمر مرتين حول نقطة التفرع $z = 1$ فقط ، فإنها تعبر من الطية R_0 إلى الطية R_1 ثم تعبر مرة أخرى عائدة إلى الطية R_0 وذلك قبل عودتها لوضعها الابتدائى . فى هذه الحالة ، تتغير قيمة θ_1 بمقدار 4π بينما لا تتغير قيمة θ_2 على الإطلاق . بالمثل ، لدوران مرتين حول النقطة $z = -1$ ، تتغير قيمة θ_2 بمقدار 4π بينما لا تتغير قيمة θ_1 على الإطلاق . مرة أخرى نرى أن التغير فى $(\theta_1 + \theta_2)/2$ يساوى 2π ، ولا تتغير قيمة الدالة f . إذن على الطية R_0 من الممكن أن نمد مدى كل من الزاويتين θ_1 و θ_2 وذلك بتغيير كل من θ_1 و θ_2 بنفس المضاعف الصحيح للمقدار 2π أو بتغيير إحدى الزاويتين فقط بمضاعف صحيح للمقدار 4π . فى كلتى الحالتين يكون التغيير الكلى فى الزاويتين مضاعف زوجى صحيح للمقدار 2π .



شكل (١١٦)

للحصول على مدى القيم لكل من θ_1 و θ_2 على الطية R_1 ، نلاحظ أنه إذا بدأت نقطة ما حركتها من على الطية R_0 ورسمت مرة واحدة مسارا حول إحدى نقطتى التفرع فقط ، فإنها تعبر للطية R_1 ولا تعود مرة أخرى للطية R_0 . فى هذه الحالة تتغير

قيمة إحدى الزاويتين بمقدار 2π بينما لا تتغير قيمة الزاوية الأخرى على الاطلاق . إذن ، على الطية R_1 تأخذ إحدى الزاويتين القيم من 2π إلى 4π بينما تأخذ الزاوية الأخرى القيم من صفر إلى 2π . بذلك يأخذ مجموعهما القيم من 2π. إلى 4π ، وتأخذ $(\theta_1 + \theta_2)/2$ ، سعة $f(z)$ ، القيم من π إلى 2π . مرة أخرى نجد أن مدى الزوايا قد امتد بتغيير قيمة إحدى الزاويتين فقط بمضاعف صحيح للمقدار 4π أو بتغيير قيمة كل من الزاويتين بنفس المضاعف الصحيح للمقدار 2π

الدالة الثنائية القيمة المعطاة بالمعادلة (١) يمكن الآن اعتبارها دالة وحيدة القيمة لنقط سطح ريمان الذى صممناه الآن . التحويلة $w=f(z)$ ترسم كل من الطيتين المستخدمتين فى تصميم سطح ريمان هذا فوق المستوى المركب w بأكمله .

كمثال آخر ، اعتبر الدالة الثنائية القيمة

$$g(z) = [z(z^2 - 1)]^{1/2} = \sqrt{rr_1r_2}\exp\left(i\frac{\theta + \theta_1 + \theta_2}{2}\right) \qquad (٢)$$

(شكل (١١٧)) . النقط $z=0, \pm 1$ نقط تفرع لهذه الدالة . نلاحظ أنه إذا كانت النقطة z ترسم دائرة تحوى هذه النقط الثلاث جميعها ، فإن سعة $g(z)$ تتغير بمقدار الزاوية 3π وبالتالى تتغير قيمة الدالة نفسها . وبالتالى فإن أى فرع قاطع لابد وأن يمتد من إحدى نقط التفرع هذه حتى نقطة اللانهاية وذلك حتى يكون بإمكاننا أن نصف فرع وحيد القيمة للدالة g . إذن نقطة اللانهاية هى أيضاً نقطة تفرع ، وهذا ما يتضح لنا بملاحظة أن الدالة $g(1/z)$ لها نقطة تفرع عند $z=o$.

افرض أن طيتان قد شقتا على امتداد القطعة المستقيمة L_2 من $z=-1$ إلى $z=o$ وعلى امتداد الجزء L_1 من المحور الحقيقى الواقع على اليمين من النقطة $z=1$. سنعتبر أن كل من الزوايا الثلاث $\theta_2, \theta_1, \theta$ تتغير فى المدى من صفر إلى 2π على الطية R_0 ومن 2π إلى 4π على الطية R_1 . وسنعتبر أيضاً أن الزوايا المناظرة لنقطة على أى من الطيتين يمكن أن تتغير بمضاعفات صحيحة للمقدار 2π مع مراعاة أن هذا يحدث شريطة أن يتغير مجموع الزوايا الثلاث بمضاعف صحيح للمقدار 4π ، وبالتالى لا تتغير قيمة الدالة g .

شكل (١١٧)

سطح آخر من سطوح ريمان للدالة الثنائية القيمة (٢) نحصل عليه بتوصيل الشفتان السفليتان فى R_0 للشقين على امتداد L_2,L_1 للشفتين العلويتين فى R_1 للشقين على امتداد L_2,L_1 على الترتيب . الشفتان السفليتان فى R_1 للشقين على امتداد L_2,L_1 يوصلان بعد ذلك للشفتين العلويتين فى R_0 للشقين على امتداد L_2,L_1 على الترتيب . ويمكن بسهولة ، بمساعدة شكل (١١٧) ، إثبات أن فرع من فروع الدالة يمثل بقيمها عند نقط على R_0 وأن الفرع الآخر للدالة يمثل بقيمها عند نقط على R_1 .

تمـــاريـــن

١ – صف سطح من سطوح ريمان للدالة الثلاثية القيمة $w=(z-1)^{1/3}$ ، ثم بين ثلث المستوى المركب w الذى يمثل صورة كل طية من طيات هذا السطح .

٢ – صف سطح ريمان للدالة log z الذى نحصل عليه بشق المستوى المركب z على امتداد الجزء السالب من المحور الحقيقى . قارن بين سطح ريمان هذا للدالة log z وسطح ريمان لنفس الدالة السابق الحصول عليه ببند (١١٥) .

٣ – عين صورة الطية R_n ، حيث n عدد صحيح اختيارى ، من سطح ريمان للدالة log z المعطى ببند (١١٥) بالتحويلة $w=\log z$.

٤ – تحقق من أن التحويلة $w=z^{1/2}$ ترسم الطية R_1 من سطح ريمان للدالة $z^{1/2}$ المعطى ببند (١١٦) فوق النصف السفلى من المستوى المركب w .

٥ – صف المنحنى ، على سطح من سطوح ريمان للدالة $z^{1/2}$ ، الذى صورته بالتحويلة $w=z^{1/2}$ كامل الدائرة $|w|=1$.

٦ – كل نقطة من نقط سطح ريمان المذكور ببند (١١٧) للدالة w=g(z) يناظرها قيمة واحدة فقط من قيم w . اثبت أن كل قيمة من قيم w يناظرها بصفة عامة ثلاث نقط على سطح ريمان هذا .

٧ – صف سطح من سطوح ريمان للدالة المتعددة القيم

$$f(z)=\left(\frac{z-1}{z}\right)^{1/2}.$$

٨ افرض أن C يرمز للدائرة $|z-2|=1$ على سطح ريمان الذى وصفناه ببند (١١٦) للدالة $z^{1/2}$ ، حيث يقع النصف العلوى من تلك الدائرة على الطية R_0 ويقع النصف السفلى من الدائرة على R_1 . لاحظ أنه لكل نقطة z على C يمكننا أن نكتب

$$z^{1/2}=\sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2}$$

حيث $4\pi-\frac{\pi}{2}<\theta<4\pi+\frac{\pi}{2}$. اذكر لماذا يمكن استنتاج أن

$$\int_C z^{1/2}\, dz = 0.$$

عمم هذه النتيجة يمكن تطبيقها فى حالة المنحنيات المغلقة البسيطة الأخرى التى تعبر من طية إلى أخرى دون أن تحوى بداخلها نقط التفرع . بعد ذلك عمم هذه النتيجة لدوال أخرى ، لتحصل بذلك على تعميم لنظرية كوشى – جورساه لتكاملات دوال متعددة القيم .

٩ – لاحظ أن سطح ريمان الذى وصفناه ببند (١١٧) للدالة $(z^2-1)^{1/2}$ يكون أيضاً سطح من سطوح ريمان للدالة

$$h(z) = z + (z^2-1)^{1/2}$$

افرض أن f_0 هو فرع الدالة $(z^2-1)^{1/2}$ المعرف على الطية R_0 ، واثبت أن الفرعان h_1, h_0 للدالة h على الطيتين يعطيان بالمعادلتين

$$h_0(z) = \frac{1}{h_1(z)} = z + f_0(z)$$

١٠ – بتمرين (٩) يمكن وصف الفرع f_0 للدالة $(z^2-1)^{1/2}$ بالمعادلة

$$f_0(z) = \sqrt{r_1 r_2}\, \exp\frac{i\theta_1}{2} \exp\frac{i\theta_2}{2},$$

حيث θ_1 و θ_2 تتغيران من صفر إلى 2π ،

$$z-1 = r_1 \exp(i\theta_1), \qquad z+1 = r_2 \exp(i\theta_2).$$

لاحظ أن $2z = r_1 \exp(i\theta_1) + r_2 \exp(i\theta_2)$ واثبت أن الفرع h_0 للدالة $h(z) = z + (z^2-1)^{1/2}$ يمكن كتابته على الصورة

$$h_0(z) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r_1}\exp\frac{i\theta_1}{2} + \sqrt{r_2}\exp\frac{i\theta_2}{2}\right)^2 .$$

أوجد $h_0(z)\overline{h_0(z)}$ ولاحظ أن $r_1 + r_2 \geqq 2$ و $\cos[(\theta_1 - \theta_2)/2] \geqq 0$ ، لجميع النقط z، لإثبات أن $|h_0(z)| \geqq 1$ بعد ذلك اثبت أن التحويلة $w = z + (z^2-1)^{1/2}$ ترسم الطية R_0 من سطح ريمان فوق المنطقة $|w| \geqq 1$ وترسم الطية R_1 فوق المنطقة $|w| \leqq 1$ ، وترسم الفرع القاطع الواصل بين النقطتين $z = \pm 1$ فوق الدائرة $|w| = 1$. لاحظ أن التحويلة المستخدمة هنا هى معكوس للتحويلة

$$z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right),$$

وقارن النتيجة التى حصلت عليها بالنتيجة التى حصلنا عليها بتمرين (١٨) ، بند (٤١) .



ملحق ١
المراجع

تحتوى القائمة التالية على مجموعة من الكتب الإضافية ويمكن الحصول على الكثير من المراجع الأخرى من الكتب المدرجة بهذا الملحق :

النظرية

AHLFORS, L. V.: "Complex Analysis," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1966.

BIEBERBACH, L.: "Conformal Mapping," Chelsea Publishing Company, New York, 1953.

———: "Lehrbuch der Funktionentheorie," vols. 1 and 2, B. G. Teubner, Berlin, 1934.

CARATHEODORY, C.: "Conformal Representation," Cambridge University Press, London, 1952.

———: "Theory of Functions of a Complex Variable," vols. 1 and 2, Chelsea Publishing Company, New York, 1954.

COPSON, E. T.: "Theory of Functions of a Complex Variable," Oxford University Press, London, 1957.

DETTMAN, J. W.: "Applied Complex Variables," Macmillan Company, New York, 1965.

DIENES, P.: "The Taylor Series: An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable," Dover Publications, New York, 1957.

EVANS, G. C.: "The Logarithmic Potential," American Mathematical Society, Providence, R.I., 1927.

FORSYTH, A. R.: "Theory of Functions of a Complex Variable," Cambridge University Press, London, 1918.

HILLE, E.: "Analytic Function Theory," vols. 1 and 2, Ginn & Company, Boston, 1959, 1962.

HURWITZ, A., and R. COURANT: "Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen," Interscience Publishers, Inc., New York, 1944.

KAPLAN, W.: "Advanced Calculus," 2d ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1973.

KELLOGG, O. D.: "Foundations of Potential Theory," Dover Publications, New York, 1953.

KNOPP, K.: "Elements of the Theory of Functions," Dover Publications, New York, 1952.

LEVINSON, N., and R. REDHEFFER: "Complex Variables," Holden-Day, Inc., San Francisco, 1970.

MACROBERT, T. M.: "Functions of a Complex Variable," Macmillan & Co., Ltd., London, 1954.

MARKUSHEVICH, A. I.: "Theory of Functions of a Complex Variable," vols. 1, 2, and 3, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965, 1967.

MITRINOVIĆ, D. S.: "Calculus of Residues," P. Noordhoff, Ltd., Groningen, 1966.

NEHARI, Z.; "Introduction to Complex Analysis," rev. ed., Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1962.

PENNISI, L. L.: "Elements of Complex Variables," Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1963.

SPRINGER, G.: "Introduction to Riemann Surfaces," Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1957.

STERNBERG, W. J., and T. L. SMITH: "Theory of Potential and Spherical Harmonics," University of Toronto Press, Toronto, 1944.

TAYLOR, A. E., and W. R. MANN: "Advanced Calculus," 2d ed., Xerox Publishing Company, Lexington, Mass., 1972.

THRON, W. J.: "Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable," John Wiley and Sons, Inc., New York, 1953.

TITCHMARSH, E. C.: "Theory of Functions," Oxford University Press, London, 1939.

WHITTAKER, E. T., and G. N. WATSON: "Modern Analysis," Cambridge University Press, London, 1950.

التطبيقات

BOWMAN, F.: "Introduction to Elliptic Functions, with Applications," English Universities Press, London, 1953.

CHURCHILL, R. V.: "Operational Mathematics," 3d ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1972.

———: "Fourier Series and Boundary Value Problems," 2d ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1963.

GLAUERT, H.: "The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory," Cambridge University Press, London, 1948.

GUILLEMIN, E. A.: "The Mathematics of Circuit Analysis," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.

JEANS, J. H.: "Mathematical Theory of Electricity and Magnetism," Cambridge University Press, London, 1925.

KOBER, H.: "Dictionary of Conformal Representations," Dover Publications, New York, 1952.

LAMB, H.: "Hydrodynamics," Dover Publications, New York, 1945.

LEBEDEV, N. N.: "Special Functions, and their Applications," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.

LOVE, A. E. H.: "Elasticity," Dover Publications, New York, 1944.

MILNE-THOMSON, L. M.: "Theoretical Hydrodynamics," Macmillan & Co., Ltd., London, 1955.

MUSKHELISHVILI, N. I.: "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity," P. Noordhoff, N. V., Groningen, Netherlands, 1953.

OBERHETTINGER, F., and W. MAGNUS: "Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik," Springer-Verlag OHG, Berlin, 1949.

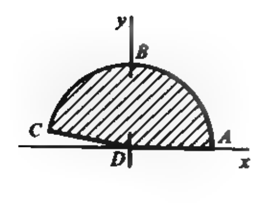
ROTHE, R., F. OLLENDORFF, and K. POHLHAUSEN: "Theory of Functions as Applied to Engineering Problems," Technology Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1948.

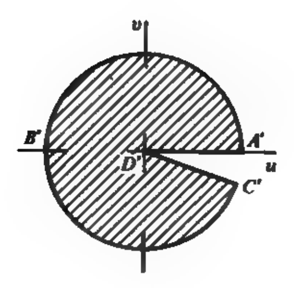
SMYTHE, W. R.: "Static and Dynamic Electricity," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1950.

SOKOLNIKOFF, I. S.: "Mathematical Theory of Elasticity," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956.

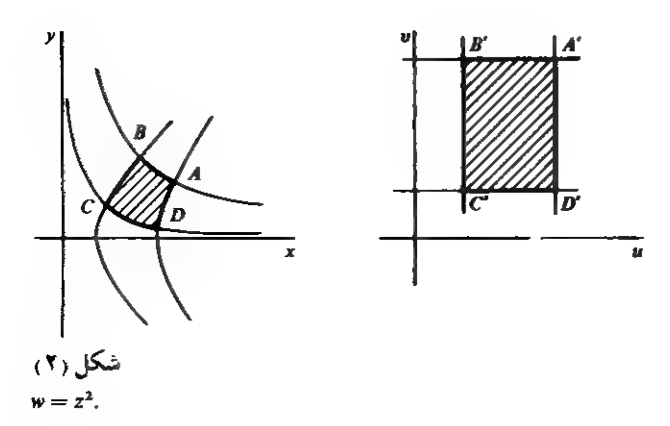
WALKER, M.: "Conjugate Functions for Engineers," Oxford University Press, London, 1933.

ملحق ٢
جدول تحويلات المناطق
(انظر الفقرة ٤١)



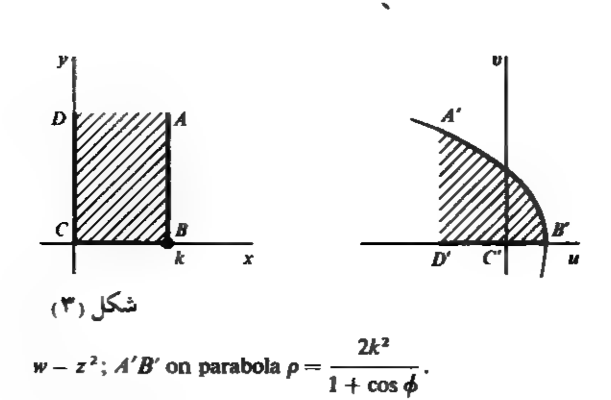


شكل (١)
$w = z^2$.



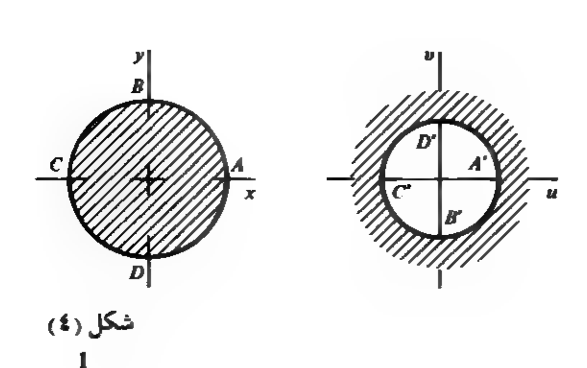
شكل (٢)

$w = z^2.$



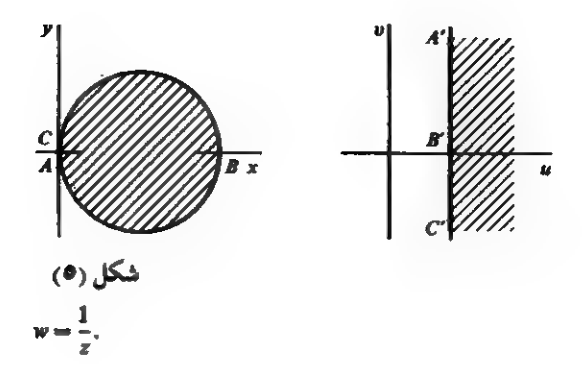
شكل (٣)

$w - z^2$; $A'B'$ on parabola $\rho = \dfrac{2k^2}{1 + \cos\phi}$.



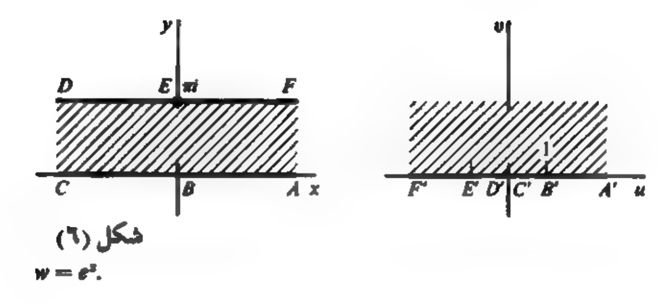
شكل (٤)

$w = \dfrac{1}{z}.$



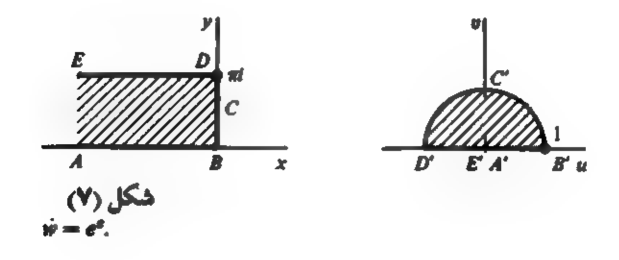
شكل (٥)

$w = \frac{1}{z}$.



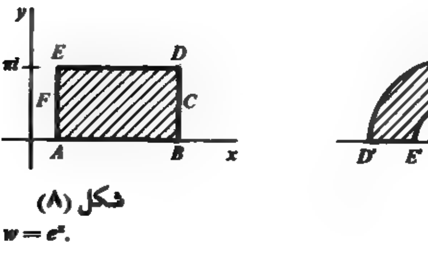
شكل (٦)

$w = e^z$.



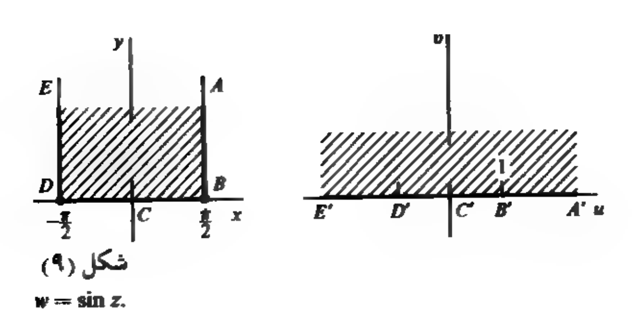
شكل (٧)

$w = e^z$.



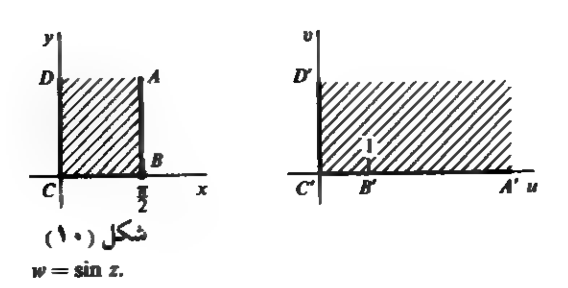
شكل (٨)

$w = e^z$.



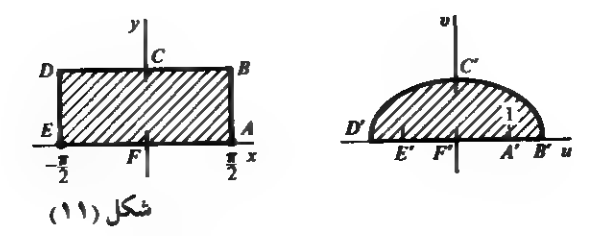
شكل (٩)

$w = \sin z.$



شكل (١٠)

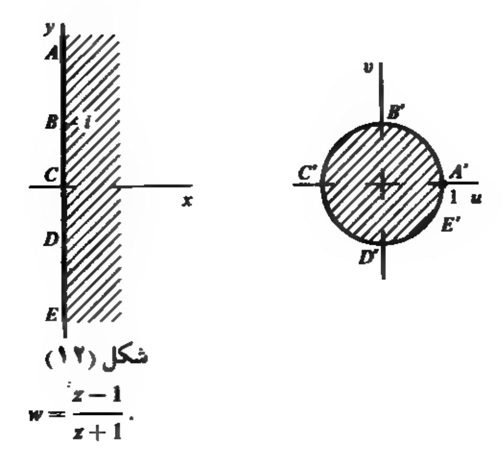
$w = \sin z.$



شكل (١١)

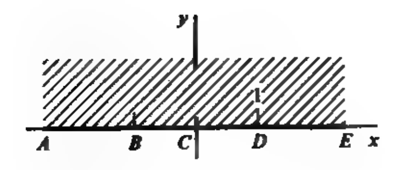
$w = \sin z$; BCD on line $y = k$, $B'C'D'$ on ellipse

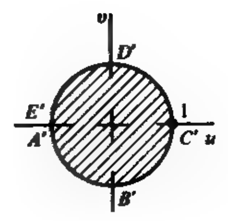
$$\left(\frac{u}{\cosh k}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh k}\right)^2 = 1.$$



شكل (١٢)

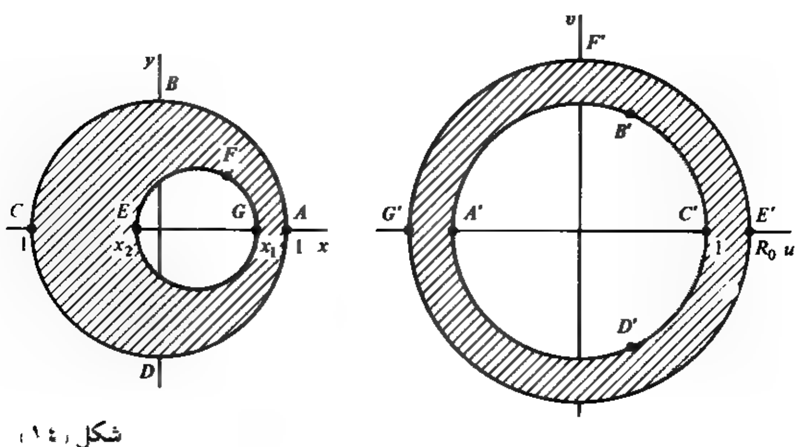
$$w = \frac{z-1}{z+1}.$$





شكل (١٣)

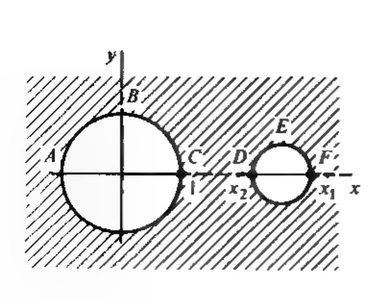
$$w = \frac{i-z}{i+z}.$$

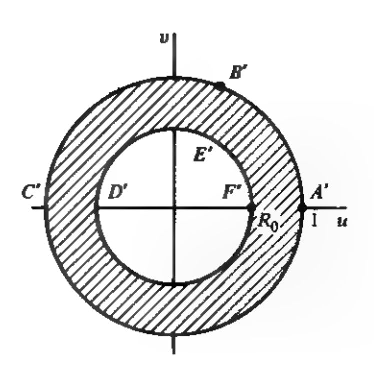


شكل (١٤)

$$w = \frac{z-a}{az-1};\ a = \frac{1 + x_1x_2 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1 + x_2};$$

$$R_0 = \frac{1 - x_1x_2 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1 - x_2}\ (a > 1 \text{ and } R_0 > 1 \text{ when } -1 < x_2 < x_1 < 1).$$



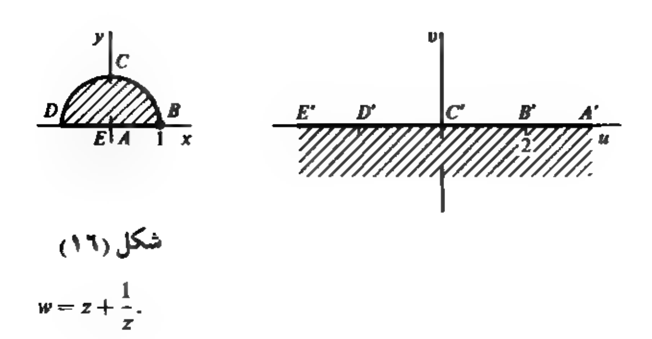


شكل (١٥)

$$w = \frac{z-a}{az-1};\ a = \frac{1 + x_1x_2 + \sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1 + x_2};$$

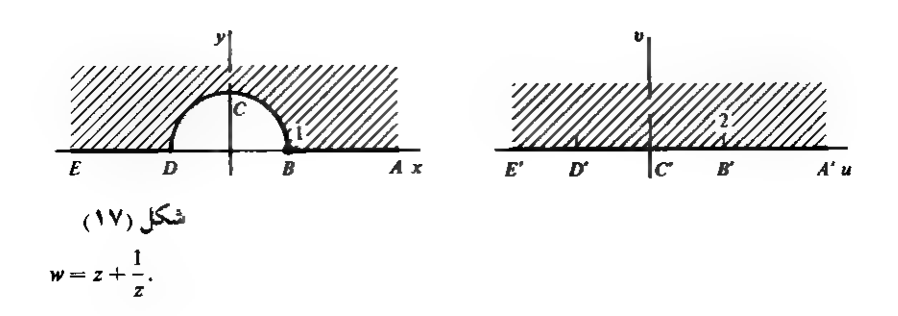
$$R_0 = \frac{x_1x_2 - 1 - \sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1 - x_2}$$

$(x_2 < a < x_1 \text{ and } 0 < R_0 < 1 \text{ when } 1 < x_2 < x_1).$



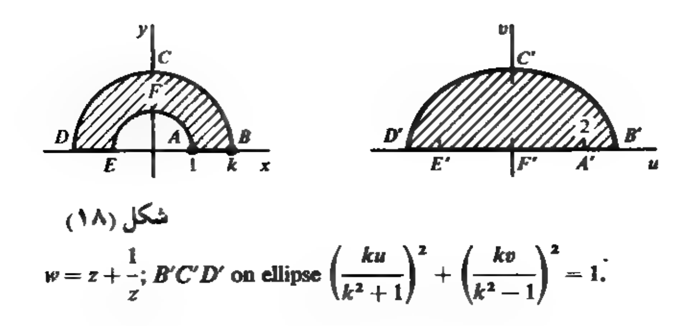
شكل (١٦)

$w = z + \frac{1}{z}.$



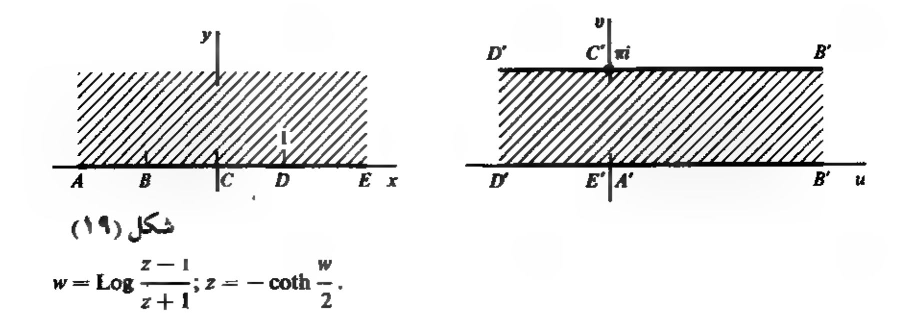
شكل (١٧)

$w = z + \frac{1}{z}.$



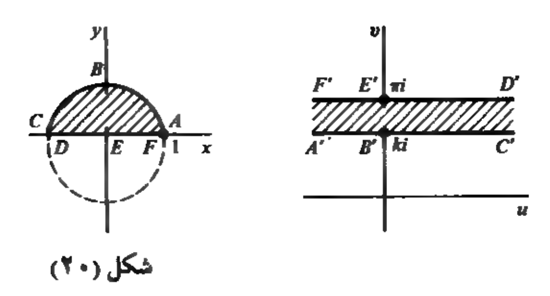
شكل (١٨)

$w = z + \frac{1}{z}$; $B'C'D'$ on ellipse $\left(\frac{ku}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{kv}{k^2-1}\right)^2 = 1.$



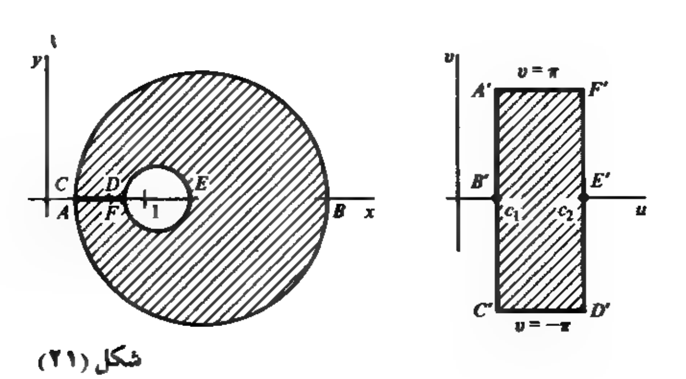
شكل (١٩)

$$w = \operatorname{Log}\frac{z-1}{z+1};\ z = -\coth\frac{w}{2}.$$



شكل (٢٠)

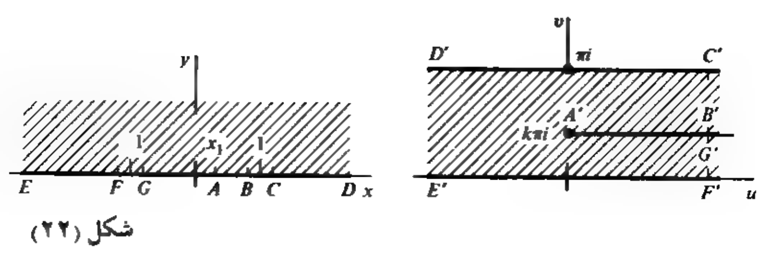
$$w = \operatorname{Log}\frac{z-1}{z+1};\ ABC \text{ on circle } x^2 + y^2 - 2y\cot k = 1.$$



شكل (٢١)

$$w = \operatorname{Log}\frac{z+1}{z-1};\ \text{centers of circles at } z = \coth c_n,$$

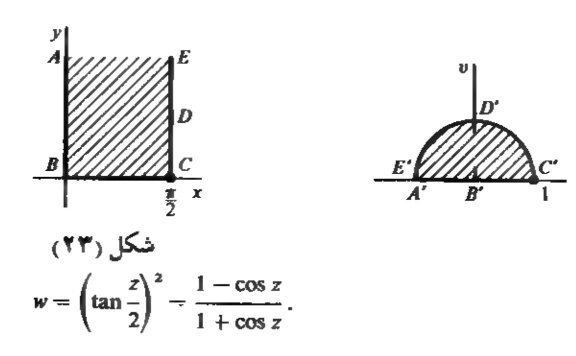
radii: $\operatorname{csch} c_n (n = 1, 2)$.



شكل (٢٢)

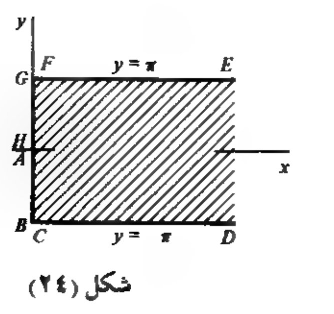
$$w = k \operatorname{Log} \frac{k}{1-k} + \operatorname{Log} 2(1-k) + i\pi - k \operatorname{Log}(z+1) - (1-k) \operatorname{Log}(z-1),$$

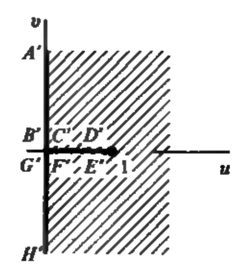
$$x_1 = 2k - 1.$$



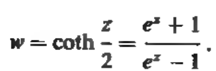
شكل (٢٣)

$$w = \left(\tan \frac{z}{2}\right)^2 = \frac{1 - \cos z}{1 + \cos z}.$$

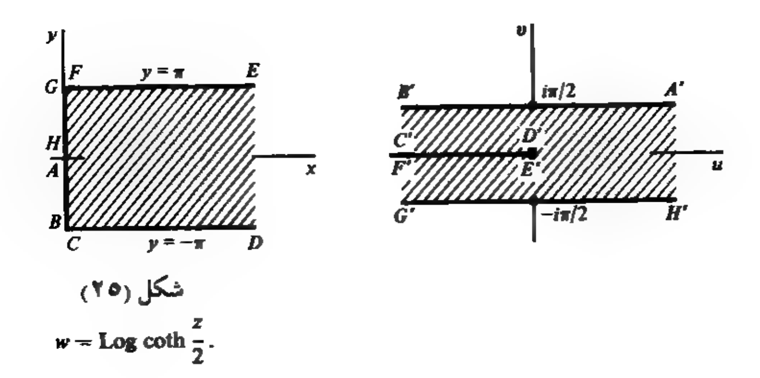




شكل (٢٤)

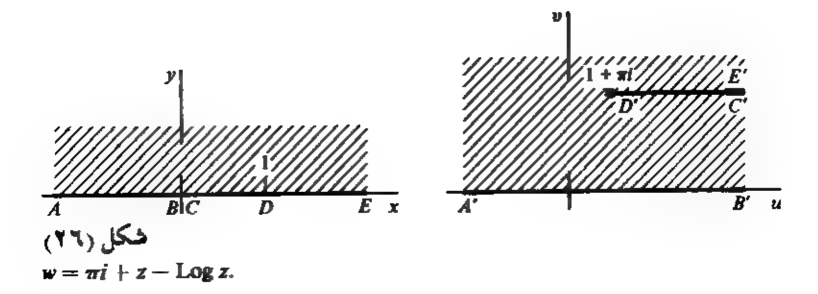


$$w = \coth \frac{z}{2} = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}.$$



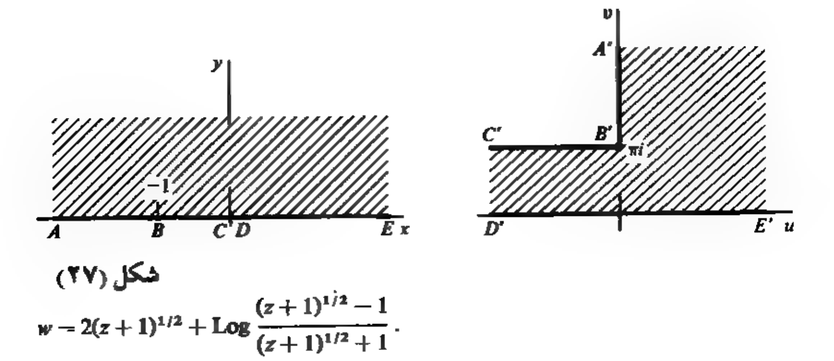
شكل (٢٥)

$w = \operatorname{Log} \coth \dfrac{z}{2}.$



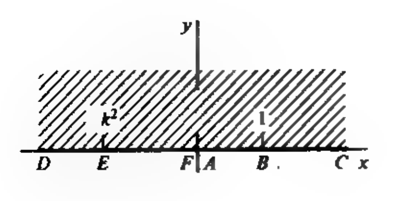
شكل (٢٦)

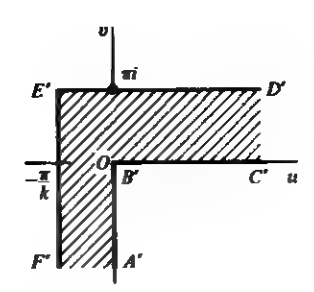
$w = \pi i + z - \operatorname{Log} z.$



شكل (٢٧)

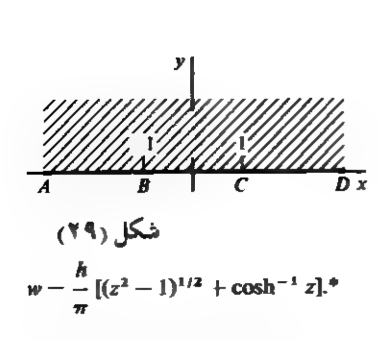
$w = 2(z+1)^{1/2} + \operatorname{Log} \dfrac{(z+1)^{1/2} - 1}{(z+1)^{1/2} + 1}.$

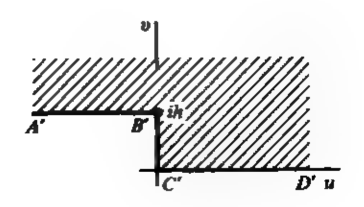




شكل (٢٨)

$$w = \frac{i}{k}\operatorname{Log}\frac{1+ikt}{1-ikt} + \operatorname{Log}\frac{1+t}{1-t};\; t = \left(\frac{z-1}{z+k^2}\right)^{1/2}.$$

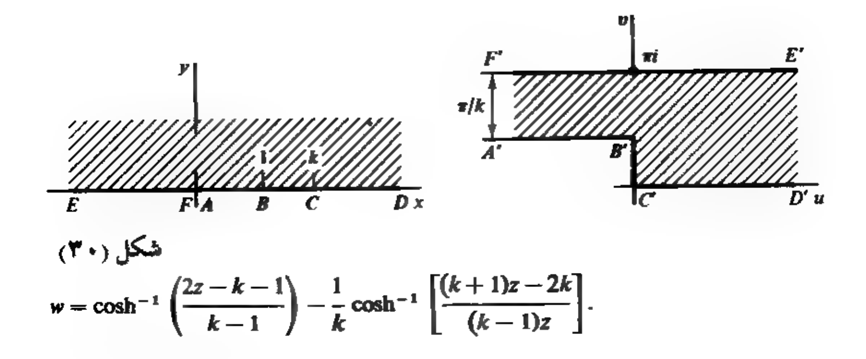




شكل (٢٩)

$$w = \frac{h}{\pi}\left[(z^2-1)^{1/2} + \cosh^{-1} z\right].^*$$

* See Exercise 4, Sec. 98.



شكل (٣٠)

$$w = \cosh^{-1}\left(\frac{2z-k-1}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\cosh^{-1}\left[\frac{(k+1)z-2k}{(k-1)z}\right].$$

قائمة المصطلحات العلمية

Absolute convergence	التقارب المطلق
Absolute value	القيمة المطلقة
Accumulation point	نقطة تجمع (أو نقطة تراكم)
Aerodynamics	ديناميكا الهواء
Analytic continuation	امتداد تحليلي
Analytic function	دالة تحليلية
Derivative of	مشتقة ...
Zeros of	أصفار ...
Angle of inclination	زاوية الميل
Angle of rotation	زاوية الدوران
Arc	قوس
Jordan	... جوردان
Simple	... بسيط
Smooth	... أملس
Argument	السعة
Argument principle	قاعدة السعة أو مبدأ السعة
Bernoulli's equation	معادلة برنولي
Beta Function	دالة بيتا
Bilinear transformation	تحويل ثنائي الخطية
Binomial expansion	مفكوك ذي الحدين
Binomial formula	صيغة ذات الحدين
Bolzano-Weierstrass theorem	نظرية بلزانو – ڤايرشتراس
Boundary conditions	شروط حدية
Transformation of	تحويلة الـ ...
Boundary point	نقطة حدية أو نقطة حدود
Boundary values problem	مسألة قيم الحدية
Bounded function	دالة محدودة
Bounded set	فئة محدودة
Branch of a function	فرع من دالة
Principal	الفرع الرئيسي للدالة (الفرع الأساسي للدالة
Branch cut	فرع قاطع
Branch point	نقطة تفرع
Integration around	التكامل حول ...
Cartesian coordinates	احداثيات كارتيزية
Cauchy, A.L.	كوشي ، أ.ل.
Cauchy-Goursat theorem	نظرية كوشي – جورساه
Converse of	معكوس ...
Cauchy integral formula	صيغة تكامل كوشي
for half plane	... لنصف المستوى
Cauchy principal value	قيمة كوشي الأساسية
Cauchy product	حاصل ضرب كوشي (للمتسلسلات)
Cauchy-Riemann equations	معادلتي كوشي – ريمان
in polar form	الصورة القطبية لـ ...
Cauchy's inequality	متباينة كوشي
Christoffel, E.B.	كريستوفل ، إ.ب
Circle of convergence	دائرة التقارب (لمتسلسلة)
Circulation of fluid	جريان سائل أو مائع
Closed contour	كفاف مغلق
Simple	... بسيط
Closed set	فئة مغلقة
closure of a set	مغلقة فئة
Complex exponents	الأسس المركبة
Complex number	عدد مركب
Argument of	سعة ...
Conjugate of	مرافق ...
Imaginary part of	الجزء التخيلي لـ ...
Polar form of	الصورة القطبية لـ ...
Powers	قوى ...
Real part of	الجزء الحقيقي لـ ...
Roots	جذور ...
Complex plane	المستوى المركب
Extended	.. الممتد

Regions of	مناطق ...
Complex potential	جهد مركب
Complex variable	متغير مركب
Composite function	دالة محصلة (أو دالة مركبة)
Composition of functions	تحصيل الدوال (أو تركيب الدوال)
Conformal mapping	راسم حافظ للزوايا الموجهة
Applications of	تطبيقات ...
Properties of	خواص ...
Conformal transformation	تحويلة حافظة للزوايا الموجهة
Angle of rotation of	زاوية دوران لـ ...
Local inverse of	المعكوسة المحلية لـ ...
Scale factor of	المعامل القياسي لـ ...
Conjugate	مرافق
Complex	.. عدد مركب
Harmonic	... توافقي
Connected open set	فئة مفتوحة مترابطة
Continuity	اتصال
Contour	كفاف
Contraction	تقلص أو إنكماش أو تصغير
Convergence of sequence	تقارب متتابعة
Convergence of series	تقارب متسلسلة
Circle of	دائرة التقارب للمتسلسلة
Uniform	التقارب المنتظم للمتسلسلة
Critical point	نقطة حرجة
Curve	منحنى
Simple closed	مغلق بسيط
De Moivre's theorem	نظرية ديموافر
Derivative	مشتقة
Existence of	تحقق وجود (أو كينونة) المشتقة
Differentiation formulas	صيغ التفاضل أو الاشتقاق
Diffusion	انتشار
Dirichlet problem	مسألة دريشلت
for disk	... للقرص
for half-plane	... لنصف المستوى
for quadrant	... لربع المستوى
for rectangle	... للمستطيل
for region exterior to circle	... لخارجية دائرة
for smicircular region	... لمنطقة نصف دائرية
for strip	لشريحة
Domain	نطاق
of definition of a function	... تعريف دالة
Multiply connected	... متعدد الترابط
Simply connected	... بسيط الترابط
Domains	نطاقات
Intersection of	تقاطع الـ ...
Union of	اتحاد الـ ...
Electrostatic potential	جهد الكهرباء الساكنة
In cylinder	... لاسطوانة
in half-plane	... لنصف مستوى
between plates	بين الواح
Entire function	دالة شاملة
Equipotential	متساوى الجهد
Essential singular point	نقطة شاذة أساسية
Behavior near	السلوك بالقرب من ...
Residue at	الباقي عند ...
Euler's formula	صيغة أويلر
Expansion	مفكوك
map	تكبير (أو راسم مكبر أو تمدد)
Exponential function	الدالة الأسية
Inverse of	معكوس ...
Mapping by	تطبيق بـ .. أو الرسم بـ ...
Extended complex plane	المستوى المركب الممتد
Exterior point	نقطة خارجية
Field intensity	شدة المجال
Fixed point	نقطة ثابتة
Fluid	سائل أو مائع
Circulation of	سريان ...
Pressure of	ضغط ...
Rotation of	دوران ...
Velocity of	سرعة ...
Fluid flow	سريان سائل
about airfoil	... حول جناح
in annular region	... في نطاق حلقي
in channel	... في قناة أو مجرى
about cylinder	... حول اسطوانة
about plate	... حول صفيحة
Potential for	جهد لـ ...
in quadrant	... في ربع المستوى
in semi-infinite strip	.. في شريحة نصف لانهائية
over step	... عبر عتبة
Flux of heat	الفيض الحرارى
Flux lines	خطوط الفيض
Fourier series	متسلسلة فوريه
Fresnel integrals	تكاملات فريسنل
Function	دالـة

English	العربية
Analytic	... تحليلية
Beta	... بيتا
Bounded	... محدودة
Branch of	فرع من ...
Continuous	... متصلة
Differentiable	... قابلة للتفاضل أو الاشتقاق
Domain of definition of	نطاق تعريف ...
Entire	... شاملة
Exponential	... أسية
Harmonic	... توافقية
Holomorphic	... تحليلية
Hyperbolic	... زائدية
Impulse	... دفع
Inverse	... عكسية (أو معكوس ...)
Irrational	... غير قياسية (أو ... غير كسرية)
Limit of	نهاية ...
Linear	... خطية
Logarithmic	... لوغاريتمية
Multiple-valued	...متعددة القيم
Piecewise continuous	... متصلة قطعة قطعة
Principal part of	الجزء الأساسي من ...
Range of	مدى
Rational	... قياسية (أو كسرية)
Real-valued	... حقيقية (أو ذات قيم حقيقية)
Stream	... التيار
Trigonometric	... مثلثية
Uniformly continuous	... منتظمة الاتصال ...
Value of	قيمة ...
Zeros of	أصفار الـ ...
Functional identities	متباينات دالية
Fundamental theorem of algebra	النظرية الأساسية للجبر
Geometric series	متسلسلة هندسية
Goursat, E	جورساه ، إ
Gradient	متجه ميل
Green's function	دالة جرين
Green's theorem	نظرية جرين
Harmonic function	دالة توافقية
Conjugate of	مرافقة ...
maximum and minimum values of	القيم العظمى والصغرى لـ ...
in quadrant	... في ربع المستوى
in semi-circle	... في نصف دائرة
Transformation of	تحويلة ...
Hydrodynamics	ديناميكا الموائع (أو السوائل)
Hyperbolic functions	دوال زائدية
Identities for	متطابقات الـ ...
Inverses of	معكوسات الـ ...
Zeros of	أصفار الـ ..
Image of a point.	صورة نقطة
Inverse	الصورة العكسية لنقطة
Imaginary axis	المحور التخيلي
Impulse function	دالة دفع
Indefinite integral	تكامل غير محدد
Integral	تكامل
Cauchy principal value of	قيمة كوشي الأساسية لـ ...
Definite	... محدد
Indefinite	... غير محدد
Linear	... خطي
real, Evaluation of	حساب تكامل حقيقي
Interior point	نقطة داخلية
Intersection of domains	تقاطع النطاقات
Inverse function	معكوس دالة أو الدالة العكسية
Inverse image of point	الصورة العكسية لنقطة
Invers epoint	معكوس نقطة
Inversion	تعاكس
Irrational functions	دوال غير قياسية
Riemann surfaces for	سطوح ريمان لـ ...
Irrotational flow	سريان لا دوراني
Isogonal mapping	راسم حافظ للزوايا
Isolated singular point	نقطة شاذة معزولة
Isolated zeros	أصفار معزولة
Isotherms	متساويات درجة الحرارة
Jordan arc	قوس جوردان
Jordan curve theorem	نظرية منحنى جوردان
Jordan's lemma	تمهيدية جوردان
Joukowski airfoil	جناح جوكوسكي
Lagrange's trigonometric identity	متطابقة لاجرانج المثلثية
Laplace's squation	معادلة لابلاس
Laurent series	... متسلسلة لوران
Level curves	... منحنيات مستوية
Limit	نهاية
of function	... دالة

English	العربية
of sequence	... متتابعة
Line integral	تكامل خطى
Linear combination	ارتباط خطى
Linear fractional transformation	تحويلة خطية كسرية
Linear functions	دوال خطية
Linear transformation	تحويلة خطية
Liouville's theorem	نظرية لوافيل
Local inverse	معكوس محلى
Logarithmic derivative	التفاضل اللوغاريتمى
Logarithmic function	دالة لوغاريتمية
Mapping by	الرسم بالـ ...
Principal branch of	الفرع الرئيسى لـ ...
Principal value of	القيمة الأساسية لـ ...
Riemann surface for	سطح ريمان لـ ...
Maclaurin series	متسلسلة ماكلورين
Mapping	راسم (أو تطبيق أو رسم)
Conformal	... حافظ للزوايا الموجهة
by exponential function	الرسم بالدالة الأسية
Isogonal	... حافظ للزوايا
by logarithmic function	الرسم بالدالة اللوغاريتمية
one-to one	... أحادى
of realaxis onto polygon	رسم المحور الحقيقى فوق مضلع
by trigonometric functions	الرسم بالدوال المثلثية
Maximum & minimum values	القيم العظمى والصغرى
Maximum principle	قاعدة القيمة العظمى
Modulus	مقياس
Morera, E.	موريرا ، إ
Morera's theorem	نظرية موريرا
Multiple valued function	دالة متعددة القيم
Multiply connected domain	نطاق متعدد الترابط
Neighborhood	جوار
Nested intervals	فترات متداخلة أو معششة
Nested squares	مربعات متداخلة أو معششة
Neumann problem	مسألة نوى مان
for disk	... للقرص الدائرى
for half-plane	... لنصف مستوى
for region exterior to circle	... لخارجية دائرة
for semicircular region	لمنطقة نصف دائرية
Open set	فئة مفتوحة
Permanence of forms	ثبات الصيغ
Picard's theorem	نظرية بيكارد
Piecewise continuous functions	دوال متصلة قطعة قطعة
Point at infinity	نقطة اللانهاية
Neighborhood of	جوار لـ ...
Poisson integral formula	صيغة تكامل بواسون
for disk	... لقرص
for half-plane	... لنصف مستوى
Poisson integral tranform	تحويلة تكامل بواسون
Poisson kernel	قلب بواسون
Poisson's equation	معادلة بواسون
Polar coordinates	احداثيات قطبية
Pole	قطب
Order of	درجة ...
Simple	... بسيط
Poles, number of	عدد الأقطاب
Polynomial	كثيرة حدود
Potential	جهد
Complex	... مركب
Electrostatic	... الكهرباء الساكنة
Velocity	... السرعة
Power series	متسلسلة أسية (أو متسلسلة تحوى)
Cauchy product of	مضروب كوشى لـ
Convergence of	تقارب ...
Differentiation of	تفاضل ...
Division of	قسمة ...
Integration of	تكامل ...
Multiplication of	ضرب ...
Uniqueness of	وحدانية ...
Powers of numbers	قوى الأعداد
Principal part	الجزء الأساسى
Pressure of fluid	ضغط سائل
Principal value	القيمة الأساسية
of argument	... للسعة
Cauchy	قيمة كوشى الأساسية
of logarithm	... لدالة اللوغاريتم
of powers	... لقوى الأعداد المركبة
Product of power series	حاصل ضرب متسلسلات أسية
Pure imaginary number	عدد تخيلى
Quadratic equation	معادلة من الدرجة الثانية
Quotient of power series	قسمة المتسلسلات الأسية
Range of function	مدى الدالة
Rational function	دالة قياسية (أو كسرية)
Real axis	المحور الحقيقى
Reflection	انعكاس

English	العربية
Reflection principle	قاعدة الانعكاس
Region	منطقة
Removable singular point	نقطة شاذة مزالة
Residue theorem	نظرية الباق
Residues	البواق
Applications of	تطبيقات ...
at poles	... عند الأقطاب
Riemann, G.F.B	ريمان ، جي . أف. ب
Riemann sphere	كرة ريمان
Riemann surfaces	سطوح ريمان
Riemann's theorem	نظرية ريمان
Roots of numbers	جذور الأعداد
Rotation	دوران
Angle of	زاوية الـ ...
of fluid	... سائل
Rouche's theorem	نظرية روشيه
Scale factor	معامل قياسي
Schwarz, H.A.	شفارتز ، إتش . إيه
Schwarz-Christoffel transformation	تحويلة شفارتز - كريستوفل
on degenerate polygon	... على مضلع متحلل
onto infinite strip	... فوق شريحة لانهائية
onto rectangle	... فوق مستطيل
onto triangle	... فوق مثلث
Schwarz integral formula	صيغة تكامل شفارتز
Schwarz interal transform	تحويلة تكامل شفارتز
Sectionaly continuous function	دالـة متصلة اتصالا قطعيا
Sequence	متابعة
Series	متسلسلة
Geometric	... هندسية
Laurent	... لوران
Maclaurin	... ماكلورين
Power	... أسية (أو ... قوى)
Taylor	... تايلور
Simple closed contour	كفاف مغلق بسيط
Simple closed curve	منحنى مغلق بسيط
Simple pole	قطب بسيط
Simply connected domain	نطاق بسيط الترابط
Singular point	نقطة شاذة
Essential	... أساسية
Isolated	... معزولة
Removable	... مزالة
Sink	مصرف أو مصب
Source	منبع أو مصدر
Stagnation point	نقطة ركود
Stereographic projection	اسقاط استريوجرافى
Stream function	دالة التيار أو دالة السريان
Stream lines	خطوط التيار أو خطوط السريان
Successive transformations	تحويلات متتالية
Table of transformations	جدول التحويلات
Taylor series	متسلسلة تايلور
Temperatures, steady	درجات الحرارة المستقرة
in cylindrical wedge	... فى وتد اسطوانى
in elliptical plate	... فى صفيحة ناقصية
in half plane	... فى نصف مستوى
in infinite plate	فى صفيحة لانهائية
in quadrant	... فى ربع مستوى
in semi-cifcular plate	... فى صفيحة نصف دائرية
in semi-infinite plate	... فى صفيحة نصف لانهائية
in strip	... فى شريحة
Thermal conductivity	التوصيل الحرارى
Transformation	تحويلة
Bilinear	... ثنائية الخطية
Conformal	... حافظة للزوايا الموجهة
Critical points of	النقط الحرجة لـ ...
Integral	... تكامل
Linear	... خطية
linear fractional	... خطية كسرية
Schawrz-Christoffel	... شفارتز - كريستوفل
Transformations	تحويلات
Successive	... متتالية
Table of	جدول لـ الـ ...
Translation	انتقال
Triangle inequality	المتباينة المثلثية
Trigonometric functions	دوال مثلثية
Identities for	متطابقات للـ ..
Inverses of	معكوسات الـ ...
Mapping by	الرسم بـ ...
Zeros of	أصفار الـ ...
Unbounded set	فئة غير محدودة
Uniform continuity	اتصال منتظم
Uniform convergence	تقارب منتظم
Union of demains	اتحاد النطاقات
Unity, roots of	جذور الوحدة
Vector field	مجال اتجاهى
Vectors	متجهات
Velocity of fluid	سرعة السائل
Velocity potential	جهد السرعة
Weierstrass, theorem of	نظرية فايرشتراس

عدد ...	Number of	أصفار الدوال	Zeros of functions
رتبة ...	Order of	أصفار منعزلة للدوال	Isolated

رقم الإيداع ١٧٧٧٦ / ٨٣

مطابع المكتب المصري الحديث